总 39卷 第 4期　　　　数 学 研 究　　　　Vol 39 No 4
2006年 12月　　　　Journal of Mathematical Study　　　　Dec 2006

G_2型 2-Toroidal李代数的顶点表示

陈玉成[1,2]　　茅新晖[3]

(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 厦门理工学院数理系, 厦门 361024
3. 华南理工大学数学科学学院, 广东 广州 510640)

摘 要 在 [4]和 [5]中已经研究了 simply-laced型 Toroidal李代数的顶点表示, [6]文据此给出了 B_l型 Toroidal李代数顶点表示的构造. 受 [6]文启发, 本文给出了 G_2型 Toroidal李代数的顶点表示的构造, 这种构造方式与 $D_4^{(1)}$ 的 Dynkin图的顶点粘合和一个 2上循环有着紧密联系.

关键词 Toroidal李代数; 顶点算子

中图分类号 O 152.5　　文献标识码 A

1 引　　言

Toroidal李代数是仿射型 Kac-Moody代数的自然推广. 设 g是 $\mathbf{C}$上的有限维单李代数, $\mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]$为 Laurent多项式代数, Toroidal李代数 $T(g)$是 $g\otimes \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]$的泛中心扩张. 当 $n=2$时, 我们称其为 2-Toroidal李代数, 本文就此情形展开讨论. Moody, Eswara Rao和 Yokonuma在 1990年给出了 Toroidal李代数的泛中心扩张并将 Frenkel-Kac以及 Segal构造的顶点算子表示推广到 Toroidal情形, 给出了 ADE型 Toroidal李代数的忠实的顶点表示 ([4][5]). 在 [6]文中, 通过仿射 Kac-Moody代数$D_{l+1}^{(1)}$型的表示给出了B_l型 2-Toroidal李代数 $T(B_l)$的一个顶点算子表示, 并通过对B_l型 Toroidal李代数顶点算子的分解, 证明了 Fock空间 V也给出了一个 Clifford代数 W 的表示. 而 [3]文基于 E_6型仿射李代数的图自同构及 E_6型 Toroidal李代数的顶点算子表示, 给出了 F_4型 Toroidal李代数的一个忠实表示.

本文将类似于 [6]文中的方法, 给出 G_2型 Toroidal李代数 $T(G_2)$的顶点算子构造. 而 [2]文中, 作者构造出了 $T(G_2)$的一类齐次顶点算子表示, 并证明了其完全可约性. 本文构造的顶点算子与 [2]文构造的顶点算子不同.

本文的结构如下: 在第 2节中, 我们首先给出了一些定义和将要用到的已知结果. 第 3节, 类似 [1]和 [4]文, 我们定义一个包含 $D_4^{(1)}$ 和 $G_2^{(1)}$ 的仿射根系 $Q(D_4^{(1)})$和 $Q(G_2^{(1)})$的整根格 Q, 其上有映射 $\chi: Q\times Q\rightarrow \{\kappa \mid \kappa^6=1\}$且满足 2-上循环条件. 故可在这个整根格上定义群代数 $\mathbf{C}[Q]$, 其上乘法运算为: $e^{\alpha}e^{\beta}=\chi(\alpha,\beta)e^{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha,\beta\in Q$. 我们定义 Fock空间为 $V:=\mathbf{C}[Q]\otimes S(\mathscr{H}_0^-)$, 并给出了 $T(G_2)$的顶点算子构造和本文的主要结果. 最后一节, 我们主要利用D_4型

* 收稿日期: 2006-01-09
基金项目: 国家自然科学基金 (10371100)

的顶点算子满足(3)－(5)式,并应用Jacobi等式和引理3证明我们的主要结果(定理1).

2 G_2型Toroidal李代数

设$\mathbf{R}^5$是具有内积运算$(\cdot,\cdot)$的欧氏空间,$\Delta(D_4^{(1)})$是仿射型Kac-Moody代数$D_4^{(1)}$的根系,我们设内积$(\cdot,\cdot)$为标准型,使得对$\forall\alpha\in\Delta(D_4^{(1)})$,有$(\alpha,\alpha)=2$.

设$\Pi(D_4^{(1)})=\{\beta_i\mid 0\le i\le 4, i\in\mathbf{Z}\}\subset\Delta(D_4^{(1)})$是$D_4^{(1)}$的一组单根系,$\Gamma(D_4^{(1)})$是$\Delta(D_4^{(1)})$的Dynkin图,如下:

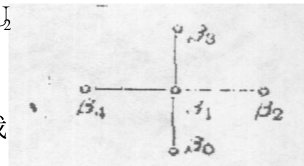

图 1

令$\theta(\beta_0)=\beta_0$, $\theta(\beta_1)=\beta_1$, $\theta(\beta_2)=\beta_3$, $\theta(\beta_3)=\beta_4$, $\theta(\beta_4)=\beta_2$,则θ给出仿射李代数$D_4^{(1)}$的图自同构.

设$\delta=\sum_{i=0}^{4}n_i\beta_i$是$D_4^{(1)}$的null根,其中$n_0=1$,设$d$为一符号,我们构造一个向量空间

$$H_0=\Big(\bigoplus_{i=0}^{4}\mathbf{C}\beta_i\Big)\oplus\mathbf{C}d \tag{1}$$

将上述内积运算$(\cdot,\cdot)$延拓到H_0,使对称双线性形式$(\cdot,\cdot): H_0\times H_0\to\mathbf{C}$,满足

$$(d,\delta)=1,\qquad (d,d)=0=(d,\beta_i),\qquad i=1,2,3,4$$

显然,$(\cdot,\cdot)$为H_0上的非退化对称双线性型,且

$$\Gamma=\Big(\bigoplus_{i=0}^{4}\mathbf{Z}\alpha_i\Big)\oplus\mathbf{Z}d \tag{2}$$

为非退化格,其中

$$\alpha_i=\begin{cases}\beta_i, & i=0,1\\ \dfrac{1}{3}(\beta_2+\beta_3+\beta_4), & i=2\\ \dfrac{1}{3}(\beta_2-2\beta_3+\beta_4), & i=3\\ \dfrac{1}{3}(\beta_2+\beta_3-2\beta_4), & i=4\end{cases}$$

因此,Γ含有子格$Q(D_4^{(1)})=\bigoplus_{i=0}^{4}\mathbf{Z}\beta_i$,同时也还含有$G_2^{(1)}$的根格$Q(G_2^{(1)})=\bigoplus_{i=0}^{2}\mathbf{Z}\alpha_i$.

引理1　集合$\Pi(G_2^{(1)}):=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\}$构成仿射型李代数$G_2^{(1)}$的一组单根系,亦对应的Dynkin图如下:

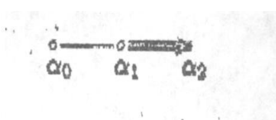

图 2

进一步,设$\alpha_j^{\vee}=\dfrac{2\alpha_j}{(\alpha_j,\alpha_j)}$, $A_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j^{\vee})$, $0\le i,j\le 2$,则

$$A_G=(A_{ij})_{i,j=0}^{2}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-3\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

是仿射型李代数$G_2^{(1)}$的广义Cartan矩阵.

一般地, 设 $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 是仿射李代数 $X_l^{(1)}$ $(X = A, B, \cdots, G)$ 的单根系, 设 $\alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, $i = 0, 1, \cdots, l$, 则 $\{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \cdots, \alpha_l^\vee\}$ 是 $X_l^{(1)}$ 的余单根系, 令 $A_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee)$, 则 $A = (A_{ij})_{i,j=0}^{l}$ 是仿射李代数 $X_l^{(1)}$ $(X = A, B, \cdots, G)$ 的广义 Cartan矩阵, 其中 $\dot{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^{l}$ 是有限维单李代数 X_l 的 Cartan矩阵. 设 $g = g(A)$ 和 $\dot{g} = g(\dot{A})$ 分别为相应的仿射型李代数和有限维单李代数.

先回忆一下 [4]中给出的 Toroidal李代数 $T(X_l)$ 的实现, 我们将利用它来证明本文的主要结果.

设 $\mathscr{L}(A)$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数, 其生成元为: c, $\alpha_i^\vee(k)$, $x_k(\pm\alpha_i)$, 其中 $i = 0, 1, \cdots, l$, $k \in \mathbf{Z}$, 生成关系为:

(R_1) $[c, \alpha_i^\vee(k)] = 0 = [c, x_k(\pm\alpha_i)]$

(R_2) $[\alpha_i^\vee(k), \alpha_j^\vee(m)] = k(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)\delta_{k+m,0}c$

(R_3) $[\alpha_i^\vee(k), x_m(\pm\alpha_j)] = \pm(\alpha_i^\vee, \alpha_j)x_{m+k}(\pm\alpha_j)$

(R_4) $[x_m(\alpha_i), x_n(-\alpha_j)] = -\delta_{ij}\left\{\alpha_i^\vee(m+n) + \frac{2m\delta_{m+n,0}}{(\alpha_i, \alpha_i)}c\right\}$

(R_5) $[x_m(\alpha_i), x_n(\alpha_i)] = 0 = [x_m(-\alpha_i), x_n(-\alpha_i)]$

$$\left.\begin{array}{l}(ad\, x_0(\alpha_i))^{-A_{ji}+1}x_m(\alpha_j) = 0\\ (ad\, x_0(-\alpha_i))^{-A_{ji}+1}x_m(-\alpha_j) = 0\end{array}\right\} i \neq j$$

其中 $i, j = 0, 1, \cdots, l$, $k, m, n \in \mathbf{Z}$.

设 $Q(A) = \oplus_{i=0}^{l}\mathbf{Z}\alpha_i$ 是仿射型李代数 $g(A)$ 的根格, $\Delta(A)$ 为对应的根系, 则 $\mathscr{L}(A)$ 依如下所定义的度构成一个分次空间.

$\deg c = (0, 0)$

$\deg \alpha_i^\vee(k) := (k, 0)$

$\deg x_k(\pm\alpha_i) := (k, \pm\alpha_i)$

其中 $i = 0, 1, \cdots, l$, $k \in \mathbf{Z}$, 我们记 $\mathscr{L}(A)$ 中度为 (k, α) 的元素所构成的空间为 $\mathscr{L}_k^\alpha$.

设 $\alpha \in \Delta(A)$, 若 $(\alpha, \alpha) > 0$, 则 $\alpha \in \Delta(A)^{re}$.

引理 2[4]　$\dim \mathscr{L}_k^\alpha = \begin{cases}1, & \alpha \in \Delta(A)^{re}\\ 0, & \alpha \notin \Delta(A)\end{cases}$, 其中 $\Delta(A)^{re} = \{\alpha \in \Delta(A) \mid \alpha$ 为实根$\}$.

引理 3[4]　设 S 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 $\mathbf{Z} \times Q(A)$ 分次李代数, $\lambda: \mathscr{L}(A) \to S$ 是一个满同态, 且满足:

(1) 对 $\forall (n, \alpha) \in \mathbf{Z} \times \Delta(A)^{re}$, λ 限制在 $\mathscr{L}_n^\alpha$ 上是单射;

(2) 对 $\forall k \in \mathbf{Z}$, 有 $\lambda(\delta(k)) \neq 0$ 且 $\lambda|_{\mathbf{C}\delta(0) + \mathbf{C}c}$ 为单射;

(3) 对 $\forall m, k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$, 有

$$\lambda([x_m(\alpha_1 + k\delta), x_0(-\alpha_1)] - [x_0(\alpha_1 + k\delta), x_m(-\alpha_1)]) = 0$$

$$\lambda([x_1(\alpha_1 + k\delta), x_{-1}(-\alpha_1)] - [x_{-1}(\alpha_1 + k\delta), x_1(-\alpha_1)]) = 0$$

则 λ 为李代数的同构映射.

命题 1[4]　李代数 $\mathscr{L}(A)$ 是 $\dot{g} \otimes \mathbf{C}[s, s^{-1}, t, t^{-1}]$ 的泛中心扩张, 即 $\mathscr{L}(A)$ 同构于 Toroidal李代数 $T(X_l)$, 其中 $X = A, B, \cdots, G$.

命题 2 设 z, z_1, z_2, $\cdots$ 为形式变量, 定义形式幂级数

$$\alpha_i^\vee(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_i^\vee(k)z^{-k}$$

$$X(\pm\alpha_i,z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_k(\pm\alpha_i)z^{-k}$$

则关系式 (R3) – (R5) 等价于以下的幂级数等式:

$$[\alpha_i^\vee(k),X(\pm\alpha_j,z)]=\pm(\alpha_i^\vee,\alpha_j)z^kX(\pm\alpha_j,z)\tag{3}$$

$$[X(\alpha_i,z_1),X(-\alpha_j,z_2)]=-\delta_{ij}\left\{\alpha_i^\vee(z_2)\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)}(D\delta)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\}\tag{4}$$

$$[X(\alpha_i,z_1),X(\alpha_i,z_2)]=0=[X(-\alpha_i,z_1),X(-\alpha_i,z_2)]\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&[X(\alpha_i,z_p),\cdots,X(\alpha_i,z_2),X(\alpha_j,z_1)]=0\\&[X(-\alpha_i,z_p),\cdots,X(-\alpha_i,z_2),X(-\alpha_j,z_1)]=0\end{aligned}\right\}i\neq j$$

其中 $p=-A_{ji}+2$, $\delta(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}z^k$, $(D\delta)(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}kz^k$.

3 顶点算子与主要定理

我们定义一个李代数

$$\tilde{\mathscr{H}}_0=(\oplus_{k\in\mathbf{Z}}H_0(k))\oplus\mathbf{C}c\tag{6}$$

其中, $H_0(k)$, $k\in\mathbf{Z}$ 是 H_0 的一个复制, 其上的李乘为:

$$[a(m),b(n)]=m(a,b)\delta_{m+n,0}c,\quad[\tilde{\mathscr{H}}_0,c]=0\tag{7}$$

$\forall\, a, b\in H_0$, $m,n\in\mathbf{Z}$

显然, $\tilde{\mathscr{H}}_0$ 有一个 Heisenberg 子代数

$$\hat{\mathscr{H}}_0=(\oplus_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}H_0(k))\oplus\mathbf{C}c\tag{8}$$

$\hat{\mathscr{H}}_0$ 的不可约模由对称代数 $S(\hat{H}_0^-)$ 给出, 这里 $\hat{H}_0^-=\oplus_{k\in\mathbf{Z}_-}H_0(k)$. 这里要求 Heisenberg 代数 $\hat{\mathscr{H}}_0$ 在 $S(\hat{H}_0^-)$ 上的作用 $c=1$; $a(-m)$ 为左乘算子; $a(m)$ 为偏微分算子, 使得 $a(m)b(-n)=m(a,b)\delta_{m-n,0}$, 这里 $m,n\in\mathbf{Z}_+$, $a,b\in H_0$.

令 $Q=(\oplus_{i=0}^4\mathbf{Z}\alpha_i)\subset\Gamma$, 显然, Q 以 $D_4^{(1)}$ 与 $G_2^{(1)}$ 的根格为其子格.

定义映射 $\varepsilon: Q\times Q\to\{\kappa|\kappa^6=1\}$, 令

$$\varepsilon(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, & 0\le i<j\le 2\\(-1)^{\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}}, & 0\le i=j\le 2\\(-1)^{(\alpha_i,\alpha_j)}, & 0\le j<i\le 2\end{cases}$$

$$\varepsilon(\alpha_3,\alpha_4)=\varepsilon(\alpha_4,\alpha_3)=(-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\varepsilon(\alpha_3,\alpha_3)=\varepsilon(\alpha_4,\alpha_4)=(-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\varepsilon(\alpha_i,\alpha_j)=1\quad 对所有其他情形$$

且有:

$$\varepsilon\left(\sum_{i=0}^4m_i\alpha_i,\sum_{j=0}^4n_j\alpha_j\right)=\prod_{i,j=0}^4(\varepsilon(\alpha_i,\alpha_j))^{m_in_j},\quad\forall\, m_i,n_j\in\mathbf{Z}\tag{9}$$

引理 4 映射 $\varepsilon: Q\times Q\to\{\kappa|\kappa^6=1\}$ 是在根格 Q 上的一个 2上循环, 即:

$$\varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\varepsilon(\alpha,\beta+\gamma)\varepsilon(\beta,\gamma),\quad\alpha,\beta,\gamma\in Q.$$

特别的, 如果把 X限制在根格 $Q(D_4^{(1)})$ 上, 则它给出了仿射李代数 $D_4^{(1)}$ 根格 $Q(D_4^{(1)})$ 的一个 2上循环 X: $Q(D_4^{(1)}) \times Q(D_4^{(1)}) \to \{\pm 1\}$ (*cf*. [1], [4]). 即,

$$X(U_i, U_j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq i < j \leq 4 \\ -1 & 0 \leq i = j \leq 4 \\ (-1)^{(U_i, U_j)}, & 0 \leq j < i \leq 4 \end{cases}$$

且

$$X\left(\sum_{i=0}^{4} m_i U_i, \sum_{i=0}^{4} n_i U_i\right) = \prod_{i,j=0}^{4} (X(U_i, U_j))^{m_i n_j}, \quad \forall m_i, n_j \in \mathbf{Z}$$

如果我们把映射 X限制在根格 $Q(G_2^{(1)})$ 上, 则 X: $Q(G_2^{(1)}) \times Q(G_2^{(1)}) \to \{\kappa \mid \kappa^6 = 1\}$ 给出了 $Q(G_2^{(1)})$ 的一个 2上循环,

$$X(T_i, T_j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq i < j \leq 2 \\ (-1)^{\frac{(T_i, T_j)}{2}}, & 0 \leq i = j \leq 2 \\ (-1)^{(T_i, T_j)}, & 0 \leq j < i \leq 2 \end{cases}$$

且

$$X\left(\sum_{i=0}^{2} m_i T_i, \sum_{i=0}^{2} n_i T_i\right) = \prod_{i,j=0}^{2} (X(T_i, T_j))^{m_i n_j}, \quad \forall m_i, n_j \in \mathbf{Z}$$

定义群代数 $\mathbf{C}[Q] = \bigoplus_{V \in Q} \mathbf{C} e^{V}$, 其上的乘法运算为:

$$e^{f} \cdot e^{V} = X(f, V) e^{f+V} \tag{10}$$

定义 Fock空间

$$V := \mathbf{C}[Q] \otimes S(\hat{H}_0^{-}) \tag{11}$$

且按如下定义使空间 V 成为一个 $\widetilde{\mathscr{H}}_0$ 的模,

$$a(m) \cdot e^{V} \otimes u = e^{V} \otimes a(m) \cdot u \tag{12}$$

$$a(0) \cdot e^{V} \otimes u = (a, V) e^{V} \otimes \cdot u \tag{13}$$

对 $\forall a \in H_0$, $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $e^{V} \otimes u \in V$.

$\mathbf{C}[Q]$ 有两个子代数 $\mathbf{C}[Q(D_4^{(1)})]$ 和 $\mathbf{C}[Q(D_2^{(1)})]$, Fock空间 V 有子空间 $V(D_4^{(1)}) = \mathbf{C}[Q(D_4^{(1)})] \otimes S(\hat{H}_0^{-})$, $V(D_4^{(1)})$ 正是 [4]中所使用的关于 D_4和 Toroidal李代数表示的 Fock空间.

在 $(\mathrm{End}(V))[[z^{\frac{1}{3}}, z^{-\frac{1}{3}}]]$中, 定义顶点算子

$$Y(U, z) = z^{\frac{(U, U)}{2}} e^{U} z^{U} E^{-}(U, z) E^{+}(U, z) \tag{14}$$

其中对 $\forall U, V \in Q$, $e^{V} \otimes u \in V$,

$$E^{\pm}(U, z) = \exp\left(-\sum_{n \in \mathbf{Z}_{\pm}} \frac{U(n)}{n} z^{-n}\right) \tag{15}$$

$$z^{U} \cdot e^{V} \otimes u = z^{(U, V)} e^{V} \otimes u \tag{16}$$

显然, $Y(U, z)$ 可形式的展成幂级数

$$Y(U, z) = \sum_{m \in \frac{1}{3}\mathbf{Z}} Y_m(U) z^{-m} \tag{17}$$

其中系数算子 $Y_m(U) \in \mathrm{End}(V)$.

由于 $T_0, T_1, T_2 + T_3 + T_4, T_2 - T_3, T_2 - T_4$ 为仿射李代数 $D_4^{(1)}$ 根系 $\Delta(D_4^{(1)})$ 的一组基, 因此

从 [4]中, 我们有:

命题 3 作用在 V(也作用于 $V(D_4^{(1)})$)的系数算子

$$\{1, U_i(k), Y_k(\pm U_i) \mid k \in \mathbf{Z}, i = 0, 1, \cdots, 4\}$$

生成一李代数, 这个李代数 (记为 S_D) 同构于 D_4 型的 Toroidal李代数.

注记 1 由此命题可知算子 $U_i(z)$, $Y(\pm U_i, z)$ 满足关系式 (3) – (5).

接下去我们将看到 Fock空间 V 还给出了 G_2型 Toroidal李代数的表示. 定义顶点算子,

$$X(\pm T_i, z) = \begin{cases} Y(\pm U_i, z) & i = 0, 1 \\ Y(\pm U_2, z) + Y(\pm U_3, z) + Y(\pm U_4, z) & i = 2 \end{cases} \tag{18}$$

注意到 $U_0 = T_0$, $U_1 = T_1$, $U_2 = T_2 + T_3 + T_4$, $U_3 = T_2 - T_3$, $U_4 = T_2 - T_4$ 是 $D_4^{(1)}$ 的单根, 则由 (18) 所定义的算子 $X(\pm T_i, z)$ 可形式的展成为变量 z 的幂级数

$$X(\pm T_i, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} X_m(\pm T_i) z^{-m}, \quad i = 0, 1, 2$$

事实上, 其中的系数算子 $X_m(\pm T_i)$ 也作用于 Fock空间 V的子空间 $V(D_4^{(1)})$ 上.

现在给出本文的主要结果,

定理 1 作用在 V(也作用于 $V(D_4^{(1)})$)的系数算子

$$\{1, \overset{\vee}{T}_i(k), X_m(\pm T_i) \mid m \in \mathbf{Z}, i = 0, 1, 2\}$$

生成一李代数, 这个李代数 (记为 S_G)同构于 G_2型 Toroidal李代数, 也就是说 Fock空间 V给出了 G_2型 Toroidal李代数的一个表示.

4 定理 1的证明

以下我们将利用引理 2和命题 2来证明定理 1.

令 $\lambda: \mathscr{L}(A_G) \to S_G$, 其作用如下:

$$c \to 1; \qquad T_i(k) \to T_i(k); \qquad x_k(\pm T_i) \to X_k(\pm T_i)$$

对 $\forall k \in \mathbf{Z}$, $i = 0, 1, 2$ 先证明 λ 为满同态, 为此只需验证所定义的算子满足关系式 $(R1)$ – $(R5)$. 由 Heisenberg关系 (7) 易知 $(R1)$ 和 $(R2)$ 成立. 为了验证关系式 $(R3)$ – $(R5)$ 成立, 只需验证算子满足幂级数等式 (3) – (5).

引理 5 $[\overset{\vee}{T}_i(k), X(\pm T_j, z)] = \pm (\overset{\vee}{T}_i, T_j) z^k X(\pm T_j, z)$, $i, j = 0, 1, 2$

证明 由命题 3知 $U_i(k)$, $Y(\pm U_i, z)$ 满足等式 (3), 故

$$\begin{aligned}
[\overset{\vee}{T}_0(k), X(\pm T_0, z)] &= [U_0(k), Y(\pm U_0, z)] = \pm 2z^k Y(\pm T_0, z) \\
&= \pm (\overset{\vee}{T}_0, T_0) z^k X(\pm T_0, z), \\
[\overset{\vee}{T}_0(k), X(\pm T_1, z)] &= [U_0(k), Y(\pm U_1, z)] = \pm (-1) z^k Y(\pm U_1, z) \\
&= \pm (\overset{\vee}{T}_0, T_1) z^k X(\pm T_1, z), \\
[\overset{\vee}{T}_0(k), X(\pm T_2, z)] &= [U_0(k), Y(\pm U_2, z) + Y(\pm U_3, z) + Y(\pm U_4, z)] = 0, \\
[\overset{\vee}{T}_1(k), X(\pm T_0, z)] &= [U_1(k), Y(\pm U_0, z)] = \pm (-1) z^k Y(\pm U_0, z) \\
&= \pm (\overset{\vee}{T}_1, T_0) z^k X(\pm T_0, z), \\
[\overset{\vee}{T}_1(k), X(\pm T_1, z)] &= [U_1(k), Y(\pm U_1, z)] = \pm 2z^k Y(\pm U_1, z) \\
&= \pm (\overset{\vee}{T}_1, T_1) z^k X(\pm T_1, z),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\check{T}_1(k), X(\pm T_2, z)] &= [U_1(k), Y(\pm U_2, z)+Y(\pm U_3, z)+Y(U_4, z)]\\
&= \pm(-1)z^k(Y(\pm U_2, z)+Y(\pm U_3, z)+Y(\pm U_4, z))\\
&= \pm(\check{T}_1, T_2)z^kX(\pm T_2, z),\\
[\check{T}_2(k), X(\pm T_0, z)] &= [(U_2+U_3+U_4)(k), Y(\pm U_0, z)] = 0,\\
[\check{T}_2(k), X(\pm T_1, z)] &= [(U_2+U_3+U_4)(k), Y(\pm U_1, z)]\\
&= \pm(U_2+U_3+U_4, U_1)z^kY(\pm U_1, z)\\
&= \pm(\check{T}_2, T_1)z^kX(\pm T_1, z),\\
[\check{T}_2(k), X(\pm T_2, z)] &= [(U_2+U_3+U_4)(k), Y(\pm U_2, z)+Y(\pm U_3, z)+Y(\pm U_4, z)]\\
&= \pm 2z^k(Y(\pm U_2, z)+Y(\pm U_3, z)+Y(\pm U_4, z))\\
&= \pm(\check{T}_2, T_2)z^kX(\pm T_2, z).
\end{aligned}
$$

□

引理 6

$$[X(T_i, z_1), X(-T_j, z_2)] = -W_{ij}\left\{\check{T}_i(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(T_i, T_j)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)C\right\},\quad i, j = 0, 1, 2,$$

$$W(z)=\sum_{k\in \mathbf{Z}} z^k,\quad (DW)(z)=\sum_{k\in \mathbf{Z}} kz^k.$$

证明　由命题 3知 $Y(\pm U_i, z)$满足关系式(4), 故

$$
\begin{aligned}
&[X(T_0, z_1), X(-T_0, z_2)] = [Y(U_0, z_1), Y(-U_0, z_2)]\\
&= -\left\{\check{U}_0(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(U_0, U_0)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\}\\
&= -\left\{\check{T}_0(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(T_0, T_0)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\},\\
&[X(T_0, z_1), X(-T_1, z_2)] = [Y(U_0, z_1), Y(-U_1, z_2)] = 0,\\
&[X(T_0, z_1), X(-T_2, z_2)] = [Y(U_0, z_1), Y(-U_2, z_2)+Y(-U_3, z_2)+Y(-U_4, z_2)] = 0,\\
&[X(T_1, z_1), X(-T_0, z_2)] = [Y(U_1, z_1), Y(-U_0, z_2)] = 0,\\
&[X(T_1, z_1), X(-T_1, z_2)] = [Y(U_1, z_1), Y(-U_1, z_2)]\\
&= -\left\{U_1(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(U_1, U_1)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\}\\
&= -\left\{\check{T}_1(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(T_1, T_1)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\},\\
&[X(T_1, z_1), X(-T_2, z_2)] = [Y(U_1, z_1), Y(-U_2, z_2)+Y(-U_3, z_2)+Y(-U_4, z_2)] = 0,\\
&[X(T_2, z_1), X(-T_0, z_2)] = [Y(U_2, z_1)+Y(U_3, z_1)+Y(U_4, z_1), Y(-U_0, z_2)] = 0,\\
&[X(T_2, z_1), X(-T_1, z_2)] = [Y(U_2, z_1)+Y(U_3, z_1)+Y(U_4, z_1), Y(-U_1, z_2)] = 0,\\
&[X(T_2, z_1), X(-T_2, z_2)]\\
&= [Y(U_2, z_1)+Y(U_3, z_1)+Y(U_4, z_1), Y(-U_2, z_2)+Y(-U_3, z_2)+Y(-U_4, z_2)]\\
&= -\left\{(U_2+U_3+U_4)(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+3(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\}\\
&= -\left\{\check{T}_2(z_2)W\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\frac{2}{(T_2, T_2)}(DW)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)c\right\}.
\end{aligned}
$$

□

引理 7 $[X(T_i, z_1), X(T_i, z_2)] = 0 = [X(-T_i, z_1), X(-T_i, z_2)]$, $i = 0, 1, 2$

证明 只证明左边等式, 右边等式类似可得. 由命题 3知 $Y(\pm U_i, z)$ 满足关系式(5), 特别的

$$[Y(\pm U_i, z_1), Y(\pm U_j, z_2)] = 0 \qquad (19)$$

其中 $i, j = 2, 3, 4$. 故

$$[X(T_0, z_1), X(T_0, z_2)] = [Y(U_0, z_1) + Y(U_0, z_2)] = 0,$$

$$[X(T_1, z_1), X(T_1, z_2)] = [Y(U_1, z_1) + Y(U_1, z_2)] = 0,$$

$$\begin{aligned} &[X(T_2, z_1), X(T_2, z_2)] \\ &= [Y(U_2, z_1) + Y(U_3, z_1) + Y(U_4, z_1), Y(U_2, z_2) + Y(U_3, z_2) + Y(U_4, z_2)] = 0. \end{aligned}$$

□

引理 8 $\left.\begin{aligned} &[X(T_i, z_p), \cdots, X(T_i, z_2), X(T_j, z_1)] = 0 \\ &[X(-T_i, z_p), \cdots, X(-T_i, z_2), X(-T_j, z_1)] = 0 \end{aligned}\right\}$ $i \neq j$, 其中 $p = -A_{ji} + 2$

证明 只证第一式, 第二式类似可得. 由命题 3知 $U(z)$, $Y(\pm U_i, z)$ 满足关系式(5), 特别的, 除等式(19)成立外, 还有下面等式成立

$$[Y(\pm U_i, z_3), [Y(\pm U_i, z_2), Y(\pm U_1, z_1)]] = 0 \qquad (20)$$

其中 $i = 2, 3, 4$. 故应等式(19), (20)和 $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ 容易验证下面等式成立 $[Y(\pm U_{i_1}, z_5), [Y(\pm U_{i_2}, z_4), [Y(\pm U_{i_3}, z_3), [Y(\pm U_{i_4}, z_2), [Y(\pm U_1, z_1)]]]]] = 0$ 故

$$\begin{aligned} &[X(T_1, z_3), X(T_1, z_2), X(T_2, z_1)] \\ &= [Y(U_1, z_3), [Y(U_1, z_2), Y(U_2, z_1) + Y(U_3, z_1) + Y(U_4, z_1)]] \\ &= [Y(U_1, z_3), [Y(U_1, z_2), Y(U_2, z_1)]] + [Y(U_1, z_3), [Y(U_1, z_2), Y(U_3, z_1)]] \\ &\quad + [Y(U_1, z_3), [Y(U_1, z_2), Y(U_4, z_1)]] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[X(T_2, z_5), X(T_2, z_4), X(T_2, z_3), X(T_2, z_2), X(T_1, z_1)] \\ &= [Y(U_2, z_5) + Y(U_3, z_5) + Y(U_4, z_5), [Y(U_2, z_4) + Y(U_3, z_4) + Y(U_4, z_4), \\ &\quad [Y(U_2, z_3) + Y(U_3, z_3) + Y(U_4, z_3), [Y(U_2, z_2) + Y(U_3, z_2) + Y(U_4, z_2), Y(U_1, z_1)]]]] \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4 = 2}^{4} [Y(U_{i_1}, z_5), [Y(U_{i_2}, z_4), [Y(U_{i_3}, z_3), [Y(U_{i_4}, z_2), Y(U_1, z_1)]]]] = 0 \end{aligned}$$

其余等式由已知显然易得. □

上述四个引理分别证明了顶点算子 $X(\pm T_i, z)$ 满足幂级数等式(3) – (5), 故λ是一个满同态. 下面证明λ为同构映射.

显然 S_G 依如下定义的度构成一个分次空间,

$\deg 1 := (0, 0)$

$\deg T_i^{\vee}(k) := (k, 0)$

$\deg X_k(\pm T_i) := (k, \pm T_i)$

欲证λ为同构, 只要再验证λ满足引理 3中的三个条件即可.

(1) 对 $\forall (n, T) \in (\mathbf{Z} \times \Delta(A_G)^{re})$; 由引理 2知 $\dim \mathscr{L}_n^{T} = 1$, 故 $\forall$ k $= a x_n(T)$, $T \in \mathbf{C}$ 若 k $\in \ker(\lambda)$, 则 λ(k) $= \lambda(a x_n(T)) = a X_n(T) = 0$, 从而 $a = 0$, 由此知 $\ker(\lambda|_{\mathscr{L}_n^{T}}) = 0$, 所以 $\lambda|_{\mathscr{L}_n^{T}}$ 为单射.

(2) 当 $k=0$, 取 $0\neq e^{d}\otimes u\in V$, 则

$$\lambda(W(0))\cdot e^{d}\otimes u=W(0)\cdot e^{d}\otimes u=(W,d)e^{d}\otimes u=e^{d}\otimes u\neq 0,$$

当 $k<0$, 取 $0\neq e^{V}\otimes u\in V$, 则

$$\lambda(W(k))\cdot e^{V}\otimes u=W(k)\cdot e^{V}\otimes u=e^{V}\otimes W(k)\cdot u\neq 0,$$

当 $k>0$,取 $0\neq e^{V}\otimes d(-k)\in V$, 则

$$\lambda(W(k))\cdot e^{V}\otimes d(-k)=W(k)\cdot e^{V}\otimes d(-k)=e^{V}\otimes k(W,d)=ke^{V}\otimes 1\neq 0,$$

故 $\forall k\in \mathbf{Z}$, $\lambda(W(k))\neq 0$.

设 $\forall c_1W(0)+c_2c\in \ker(\lambda|_{CW(0)+Cc})$, 则对 $\forall e^{V}\otimes u\in V$, 有 $(c_1W(0)+c_2c)\cdot e^{V}\otimes u=0$, 取 $e^{W}\otimes u\in V$, 可得 $c_2=0$, 再取 $e^{d}\otimes u\in V$, 得 $c_1=0$. 从而知 $\ker(\lambda|_{CW(0)+Cc})=0$, 故 $\lambda|_{CW(0)+Cc}$ 为单射.

(3) 对 $\forall m, k\in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}&\lambda([x_m(T_1+kW), x_0(-T_1)]-[x_0(T_1+kW), x_m(-T_1)])\\ =&[X_m(T_1+kW), X_0(-T_1)]-[X_0(T_1+kW), X_m(-T_1)]\\ =&[Y_m(T_1+kW), Y_0(-T_1)]-[Y_0(T_1+kW), Y_m(-T_1)]\neq 0\end{aligned}$$

同理, $\lambda([x_1(T_1+kW), x_{-1}(-T_1)]-[x_{-1}(T_1+kW), x_1(-T_1)])\neq 0$所以, λ是同构映射, 定理 1由此即得.

参　考　文　献

[1] Frenkel I B, Lepowsky J, Meurma A. Vertex operator algebras and the Monster. Academic Press, Boston, 1989.

[2] Dong Liu, Hu Naihong. Vertex Representations for Toroidal Lie Algebra of Type G_2. Journal of Pure and Applied Algebra, 2005, 198: 257-279.

[3] 茅新晖. F_4型 Toroidal李代数的顶点算子表示. 厦门大学学报, 2003, 42: 281-286.

[4] Moody R V, Eswara Rao S, Yokonuma T. Toroidal Lie algebras and vertex representations. Geometriae Dedicata, 1990, 35: 283-307.

[5] Eswara Rao S, Moody R V. Vertex representations for n-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebras. Commun. Math. Phys, 1994, 159: 239-264.

[6] Tan Shaobin. Vertex operator representations for Toroidal Lie algebra of type B_l. Comm. Algebra, 1999, 27: 3593-3618.

Vertex Representation of 2-Toroidal Lie Algebra of Type G_2

Chen Yucheng[1,2]　　*Mao Xinhui*[3]

(1. Department of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

2. Department of Mathematics and Physics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361005,

3. Department of Mathematical Sciences, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510641)

Abstract In [4], [5], the authors gave the vertex representations of the simply laced toroidal Lie algebra and according to the above, [6] gave the construction of the vertex representation of toroidal Lie Algebra $T(B_l)$. According to the main idea of [6], we give the construction of the vertex representation of the toroidal Lie algebra $T(G_2)$. This construction has the close relation with the Dynkin diagram of type $D_4^{(1)}$ and a 2-cocycle.

Keywords Toroidal Lie algebra, vertex operator