第 45 卷 第 4 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 4
2006 年 7 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 2006

一维拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题

曲 程 远
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 考虑了一类一维拟线性退化抛物方程的 Dirichlet 问题,证明了其弱解存在性,主要思想是采用了压缩半群的方法,首先构造了一个耗散算子 A_0,然后用正则化方法和椭圆方程理论,证明了方程 $u-\lambda A_0 u=v$ 存在惟一解.结合指数公式,在 $L^1(\Omega)$ 上就可以构造压缩半群 $S(t)v$. 最后证明了由压缩半群构造的解 $S(t)u_0$ 满足方程.

关键词: 拟线性退化抛物方程;压缩半群;Dirichlet 问题

中图分类号: O 175 **文献标识码**: A **文章编号**: 0438-0479(2006)04-0458-04

本文用压缩半群的方法研究下面 Dirichlet 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right),$$

$$(x,t)\in\Omega\times(0,T) \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t\in[0,T] \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

这里 $\alpha\geqslant 2, p\geqslant 2, \Omega=(0,1)$.

下列方程是式(1) 的特例,非 Newton 渗流方程,又称发展的 p-Laplace 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

非 Newton 多方渗流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}u^m\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x}u^m\right),$$

其中 $m>0, p>1$. 这类方程在过去的 30 多年中已成为广泛的研究对象.其物理来源见文献[1].

定义 1 设 $u\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ 为 Dirichlet 问题(1) ~ (3) 的弱解, 如果 $|u|^{\alpha-2}u\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, 且对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$ 和 $h\in C_0^\infty(\Omega)$,有

$$\iint_{\Omega\times(0,T)}\left(-u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

$$\operatorname{ess}\lim_{t\to 0}\int_\Omega u(x,t)h(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega u_0(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

1 弱解的存在性

记 $D(A_0)=\{u\in L^1(\Omega);\ |u|^{\alpha-2}u\in W^{1,p}(\Omega),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{\alpha-2}u)\right)\in L^1(\Omega)\}$.

由

$$A_0u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{\alpha-2}u)\right)$$

定义算子

$$A_0: D(A_0)\to L^1(\Omega).$$

算子 A_0 的闭包记为 A.

命题 1 算子 A_0 是耗散的,算子 A 也是耗散的.

证明 设 $u_1,u_2\in D(A_0), v_1=A_0u_1, v_2=A_0u_2$. 为证明算子 A_0 是耗散的,根据文献[2]命题 11.1.1 只须证明

$$J(u_1,u_2)=\int_\Omega \mathrm{sgn}(u_1-u_2)(v_1-v_2)\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{4}$$

这是因为,假如这一不等式得到了证明,则对任意的 $\lambda>0$,有

$$\|u_1-u_2\|_{L^1(\Omega)}=\int_\Omega\mathrm{sgn}(u_1-u_2)(u_1-u_2)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_\Omega\mathrm{sgn}(u_1-u_2)(u_1-u_2)\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_\Omega\mathrm{sgn}(u_1-u_2)(v_1-v_2)\mathrm{d}x=$$
$$\int_\Omega\mathrm{sgn}(u_1-u_2)((u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2))\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_\Omega|(u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2)|\mathrm{d}x=$$
$$\|(u_1-u_2)-\lambda(v_1-v_2)\|_{L^1(\Omega)}.$$

下面证明式(4). 定义

$$H_\varepsilon(s)=\int_0^s h_\varepsilon(t)\mathrm{d}t,$$

$$h_\varepsilon(s)=\begin{cases}\frac{2}{\varepsilon}\left(1-\frac{|s|}{\varepsilon}\right), & |s|<\varepsilon,\\ 0, & |s|\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

收稿日期: 2005-06-24

作者简介: 曲程远(1979—),男,硕士研究生.
Email: quchengyuan@tom.com

易见

$$h_\varepsilon(s) \geqslant 0,\ |H_\varepsilon(s)| \leqslant 1, \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(s) = \mathrm{sgn}(s).$$

由于当 $\alpha \geqslant 2$ 时，$(|u|^{\alpha-2}u)$ 关于 u 是单调递增的，故 $\mathrm{sgn}(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2) = \mathrm{sgn}(u_1-u_2)$ 和 $H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)$ 是 $\mathrm{sgn}(u_1-u_2)$ 的光滑逼近. 在式(4) 中用 $H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2)$ 代替 $\mathrm{sgn}(u_1-u_2)$，有

$$J_\varepsilon(u_1,u_2) = \int_\Omega H_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_1|^{\alpha-2}u_1)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_1|^{\alpha-2}u_1)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_2|^{\alpha-2}u_2)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_2|^{\alpha-2}u_2)\right)\right)\mathrm{d}x =$$
$$-\int_\Omega h_\varepsilon(|u_1|^{\alpha-2}u_1 - |u_2|^{\alpha-2}u_2) \cdot \left(\left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_1|^{\alpha-2}u_1)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_1|^{\alpha-2}u_1)\right) - \left(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_2|^{\alpha-2}u_2)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_2|^{\alpha-2}u_2)\right)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_1|^{\alpha-2}u_1) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u_2|^{\alpha-2}u_2)\right)\mathrm{d}x,$$

而 $(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)$ 在 $p \geqslant 2$ 时大于等于零，故 $J_\varepsilon(u_1,u_2) \leqslant 0$. 令 $\varepsilon \to 0$ 取极限即得式(4). 所以 A_0 是耗散的，故 A 也是耗散的.

为了应用压缩半群理论，还要证明对充分小的 $\lambda > 0$，有

$$\overline{D(A)} \subset R(I-\lambda A).$$

事实上，只要证明

$$R(I-\lambda A) = L^1(\Omega), \forall \lambda > 0.$$

为此，又只须证明

$$L^\infty(\Omega) \subset R(I-\lambda A_0), \forall \lambda > 0 \tag{5}$$

这是因为由式(5) 可推出

$$L^1(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)} \subset \overline{R(I-\lambda A_0)} \subset \overline{R(I-\lambda A)} \subset R(I-\lambda A),$$

所以

$$R(I-\lambda A) = L^1(\Omega).$$

而证明式(5)，就是证明：对任意的 $\lambda > 0$ 和 $v \in L^\infty(\Omega)$，算子方程

$$u - \lambda A_0 u = v$$

有解，即存在函数 $u \in D(A_0)$，使得 $u - \lambda A_0 u = v$.

命题 2　对任意 $\lambda > 0$ 和 $v \in L^\infty(\Omega)$，存在惟一的函数 $u \in D(A_0)$，使得 $u - \lambda A_0 u = v$，且

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$
$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L^1(\Omega)} \tag{6}$$

证明　设 $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$，$\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$，且 v_n 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 v. 考虑正则化问题

$$u_n - \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right) = v_n, x \in \Omega \tag{7}$$

$$u_n(0) = u_n(1) = 0 \tag{8}$$

根据椭圆方程的理论，这一问题存在古典解 $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. 以下我们对 u_n 做必要的估计.

首先，由极值原理易见

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{9}$$

其次，在方程(7) 两端同乘以 $H_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)$ 并在 Ω 上积分，经分部积分，并利用式(8)，有

$$\int_\Omega u_n H_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\mathrm{d}x =$$
$$\lambda\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)H_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\mathrm{d}x +$$
$$\int_\Omega v_n H_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\mathrm{d}x =$$
$$-\lambda\int_\Omega \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2 h_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\mathrm{d}x +$$
$$\int_\Omega v_n H_\varepsilon\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\mathrm{d}x,$$

其中 H_ε 和 h_ε 是命题 1 中的定义的函数. 令 $\varepsilon \to 0^+$，则有

$$\int_\Omega |u_n|\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega v_n \mathrm{sgn} u_n \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |v_n|\mathrm{d}x,$$

注意到 v_n 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 v，可得

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|v_n\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C \tag{10}$$

其中 C 是与 n 无关的常数.

再次，在方程(7) 两端同乘以 $\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n$ 并在 Ω 积分，经分部积分，并利用式(8)，可得

$$\int_\Omega u_n^2\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right)^2\mathrm{d}x =$$
$$\int_\Omega v_n\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\mathrm{d}x,$$

因此

$$\lambda\int_\Omega \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right)\right|^p\mathrm{d}x \leqslant \left\|\left(u_n^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}u_n\right\|_{L^\infty(\Omega)}\|v_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

利用式(9),并注意到 v_n 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛于 v,可知上式右端有界,故

$$\int_\Omega \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_n^2+\frac{1}{n})^{\frac{m-2}{2}}u_n \right|^p \mathrm{d}x \leqslant C(\lambda) \tag{11}$$

其中 $C(\lambda)$ 是一个仅依赖于 λ 而与 n 无关的常数.

利用式(9) ~ (11) 和对角线方法,易见存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_k}\}$ 和函数 $u \in L^\infty(\Omega)$,$\omega \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$,有

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ 于 } L^2(\Omega) \tag{12}$$

$$(u_n^2+\frac{1}{n})^{\frac{m-2}{2}}u_n \to \omega \text{ 于 } L^p(\Omega) \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_n^2+\frac{1}{n})^{\frac{m-2}{2}}u_n) \rightharpoonup \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} \text{ 于 } L^p(\Omega) \tag{14}$$

由式(13) 知,$\{u_{n_k}\}$ 存在子列,不妨设就是$\{u_{n_k}\}$,使得

$$(u_{n_k}^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{m-2}{2}}u_{n_k} \to \omega, \quad \text{a.e. 于 } \Omega,$$

它显然包含

$$|u_{n_k}|^{m-2}u_{n_k} \to \omega, \quad \text{a.e. 于 } \Omega,$$

又由式(12)、(13),有

$$\omega = |u|^{m-2}u \in L^p(\Omega)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_n^2+\frac{1}{n})^{\frac{m-2}{2}}u_n) \rightharpoonup \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u) \tag{15}$$

对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,由于 u_{n_k} 是问题

$$u_{n_k} - \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_{n_k}^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{m-2}{2}}u_{n_k}))^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{p-2}{2}} \cdot$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_{n_k}^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{m-2}{2}}u_{n_k})) = v_{n_k}, x \in \Omega,$$
$$u_{n_k}(0) = u_{n_k}(1) = 0$$

的古典解,故有

$$\int_\Omega u_{n_k}\varphi \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega ((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_{n_k}^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{m-2}{2}}u_{n_k}))^2 +$$
$$\frac{1}{n_k})^{\frac{p-2}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((u_{n_k}^2+\frac{1}{n_k})^{\frac{m-2}{2}}u_{n_k})\varphi' = \int_\Omega v_{n_k}\varphi \mathrm{d}x.$$

令 $k \to \infty$,得

$$\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)\right|^{p-2} \cdot$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)\varphi' = \int_\Omega v\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{16}$$

这表明 u 是方程

$$u - \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)\right|^{p-2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)) = v, \qquad x \in \Omega$$

的弱解. 由式(16) 知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)\right|^{p-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|u|^{m-2}u)) =$$
$$\frac{u-v}{\lambda} \in L^1(\Omega),$$

结合式(15) 知 $|u|^{m-2}u \in W^{1,p}(\Omega)$,故 $u \in D(A_0)$,且

$$u - \lambda A_0 u = v.$$

不等式(6) 由式(9) 和式(10) 即可推出.

下面我们证明惟一性. 实际上,我们可以证明:设 $v_1, v_2 \in L^\infty(\Omega)$,$u_1, u_2 \in D(A_0)$,满足

$$u_1 - \lambda A_0 u_1 = v_1, \quad u_2 - \lambda A_0 u_2 = v_2,$$

则

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| v_1 - v_2 \|_{L^1(\Omega)}.$$

为此,将 u_1 和 u_2 所满足的算子方程相减,得

$$(u_1 - u_2) - \lambda(A_0 u_1 - A_0 u_2) = (v_1 - v_2).$$

在上式两端同乘以 $\mathrm{sgn}(u_1 - u_2)$,然后在 Ω 上积分,得

$$\int_\Omega \mathrm{sgn}(u_1-u_2)(u_1-u_2)\mathrm{d}x -$$
$$\lambda\int_\Omega \mathrm{sgn}(u_1-u_2)(A_0u_1 - A_0u_2)\mathrm{d}x =$$
$$\int_\Omega \mathrm{sgn}(u_1-u_2)(v_1-v_2)\mathrm{d}x.$$

由命题 1 的证明知 $\int_\Omega \mathrm{sgn}(u_1 - u_2)(A_0u_1 - A_0u_2)\mathrm{d}x \leqslant 0$. 故

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| v_1 - v_2 \|_{L^1(\Omega)}.$$

定理 1 算子 A 生成 $L^1(\Omega)$ 上的一个压缩半群 S,如果 $v \in L^\infty(\Omega)$,则对任意的 $t \geqslant 0$,有 $S(t)v \in L^\infty(\Omega)$,且

$$\| S(t)v \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^1(\Omega)},$$
$$\| S(t)v \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{17}$$

证明 由算子 A_0 的定义可知,$\overline{D(A_0)} = L^1(\Omega)$,从而 $\overline{D(A)} = L^1(\Omega)$. 于是,由命题 1,命题 2 和指数公式可知,对任意的 $v \in L^1(\Omega)$,在 $L^1(\Omega)$ 中极限

$$S(t)v = \lim_{\lambda\to 0}(I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1}v, \quad \forall t \geqslant 0$$

存在,且上述极限在$[0, +\infty)$ 上关于 t 是局部一致的. 此外,$S(t)v$ 是 $L^1(\Omega)$ 上的压缩半群.

设 $v \in L^\infty(\Omega)$,$t \geqslant 0$. 由命题 2,可得

$$(I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1}v = (I - \lambda A_0)^{-[t/\lambda]-1}v.$$

反复利用命题 2 中的不等式,可知对任意的 $\lambda > 0$,有

$$\| (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1}v \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^1(\Omega)},$$
$$\| (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1}v \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

令 $\lambda \to 0^+$,即得式(17).

定理 2 设 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$,则 $u(x,t) = S(t)u_0(x)$ 为问题(1) ~ (3) 的弱解.

证明 记

$$u_\lambda = (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]-1}u_0(x) =$$
$$(I - \lambda A_0)^{-[t/\lambda]-1}u_0(x), \lambda > 0.$$

由定理 1 的证明可知，u_λ 在 $L^1(\Omega\times(0,T))$ 中局部一致收敛于 u，且对任意的 $t\geqslant 0$，有

$$\|u(.,t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{L^1(\Omega)},$$
$$\|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$
$$\|u_\lambda(.,t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{L^1(\Omega)},$$
$$\|u_\lambda(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

故 $|u_\lambda|^{\alpha-2}u_\lambda$ 在 $L^p(\Omega\times(0,T))$ 中局部一致收敛于 $|u|^{\alpha-2}u$.

由命题 2 和 u_λ 的定义可知，对任意的 $t>0$，$u_\lambda(.,t)\in D(A_0)$，且

$$u_\lambda(x,t)-\lambda A_0u_\lambda(x,t)=(I-\lambda A_0)^{-[t/\lambda]}u_0(x)=u_\lambda(x,t-\lambda),\quad 0<\lambda<t,$$

即对任意的 $t>0$ 和 $0<\lambda<t$，有

$$\frac{u_\lambda(x,t)-u_\lambda(x,t-\lambda)}{\lambda}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda|^{\alpha-2}u_\lambda)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda|^{\alpha-2}u_\lambda)\right).$$

设 $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$. 上式两端同乘以 φ，然后在 $\Omega\times(0,T)$ 上积分，经分部积分，得

$$\frac{1}{\lambda}\iint_{\Omega\times(0,T)}(u_\lambda(x,t)-u_\lambda(x,t-\lambda))\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{\Omega\times(0,T)}\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda(x,t)|^{\alpha-2}u_\lambda(x,t))\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda(x,t)|^{\alpha-2}u_\lambda(x,t))\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由于 $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T))$，故当 $\lambda>0$ 充分小时，有 $\mathrm{supp}\varphi\in\Omega\times(0,T)$，这时有

$$\iint_{\Omega\times(0,T)}u_\lambda(x,t-\lambda))\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{\Omega\times(0,T)}u_\lambda(x,t))\varphi(x,t+\lambda)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

因此，当 $\lambda>0$ 充分小时，有

$$\iint_{\Omega\times(0,T)}u_\lambda(x,t)\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,t+\lambda)}{\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{\Omega\times(0,T)}\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda|^{\alpha-2}u_\lambda)\right|^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(|u_\lambda|^{\alpha-2}u_\lambda)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

令 $\lambda\to 0^+$，得

$$\iint_{\Omega\times(0,T)}u(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{\Omega\times(0,T)}\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

即

$$\iint_{\Omega\times(0,T)}\left(u(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-\left|\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\right|^{p-2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(|u|^{\alpha-2}u)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$
$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega\times(0,T)).$$

又由于 $u(x,t)=S(t)u_0(x)\in C((0,T),L^1(\Omega))$，$u(x,0)=u_0(x)$，故

$$\lim_{t\to 0^+}\int_\Omega u(x,t)h(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega u_0(x)h(x)\mathrm{d}x,\quad h\in C_0^\infty(\Omega).$$

这就说明了 u 是问题(1)～(3)弱解.

参考文献：

[1] 伍卓群，赵俊宁，尹景学，等. 非线性扩散方程[M]. 吉林：吉林大学出版社，1996：134－136.

[2] 伍卓群，尹景学，王春朋. 椭圆与抛物方程引论[M]. 北京：科学出版社，2003：248－257.

The Dirichlet Problem for Quasilinear Degenerate Parabolic Equations in One Dimension

QU Cheng-yuan

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper is devoted to the study of the Dirichlet problem of quasilinear degenerate parabolic equations in one dimension, and by using the contraction semigroup method, the existence of the weak solution is obtained. First a dissipative operation A_0 is constructed. Then by using the regularization method and the elliptic equations theory, the existence of the unique solution of the equation $u-\lambda A_0u=v$ is established. Employing exponential formula, a contraction semigroup $S(t)v$ can be constructed in $L^1(\Omega)$. Finally it is proved that $S(t)u_0(x)$ is the weak solution.

Key words: quasilinear degenerate parabolic equations; contraction semigroup; Dirichlet problem