Vol. 26(2006)
No. 3, pp292-296

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 Banach 空间的 k-光滑性*

魏文展[1]，程庆进[2]，董 鸽[3]

(1. 广西经贸职业技术学院, 广西 南宁 530021)

(2. 厦门大学数学系, 福建厦门 361005)

(3. 上海大学数学系, 上海 200436)

摘 要：本文研究了 k-光滑的 Banach 空间, 引入了 k-G 可微性的概念. 得到了 k-光滑的 Banach 空间的几个等价条件.

关键词：k-光滑; k-G 可微; 支撑映射

MR(2000)主题分类号：**46B09** 中图分类号：**O177.2**

文献标识码：**A** 文章编号：**0255-7797(2006)03-0292-05**

自文[1]引入 Banach 空间的 k-光滑性后, 国内为学者对此作了深入研究, 但至今未取得象文献[2]定理 5.2.12 给出的光滑性那样的完美结果, 受文[3]的启发, 本文利用给出的 k-G 可微及支撑映射在 k 维子空间上的范数到 w^* 下半连续性解决了这个问题, 并取得了一些与光滑性相对应的结果.

本文中, X 为 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭, $S=\left\{x\in X: \|x\|=1\right\}$, $U^*=\left\{f\in X^*: \|f\|\leqslant 1\right\}$, $S^*=\left\{f\in X^*: \|f\|=1\right\}$, $\sum(x)=\left\{f\in S^*: f(x)=\|x\|\right\}$. 对 $x\in S$ 及 $\lambda>0$, 以 $F(x,\lambda)$表示切片$\left\{f\in U^*: f(x)\geqslant 1-\lambda\right\}$. $\dim\sum(x)$表示集合$\sum(x)$的维数. $\forall y\in X, \lambda>0, F(x,\lambda)(y)=\sup\left\{f(y): f\in F(x,\lambda)\right\}-\inf\left\{f(y): f\in F(x,\lambda)\right\}$. 对 $x\in S$, 以 Y_x 表示 X 的一个 k 维子空间且 $x\notin Y_x$. 以 $\forall Y_x$($\exists Y_x$)表示任取(存在)X 的 k 维子空间, 且 $x\notin Y_x$.

定义 1[1] $x\in S$ 称为 X 的 k-光滑点, 若 $\dim\sum(x)\leqslant k$. 若 $\forall x\in S$, 有 $\dim\sum(x)\leqslant k$, 则称 X 为 k-光滑的.

由文[4]定理 1 的证明或文[5]引理 3, 4 不难得到:

引理 1 $x\in S$ 为 X 的 k-光滑点, 当且仅当 $\forall Y_x$, 则 $\exists y\in S(Y_x)$, 使 x 为 $\mathrm{span}\{x,y\}$ 的光滑点.

引理 2 $x\in S$ 不为 X 的 k-光滑点, 则存在 $f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}\in\sum(x)$且线性无关及 Y_x 和 $a>0$, 使 $Y_x\subset\ker f_{k+1}$且 $\forall y\in S(Y_x)$, $\exists l$, $1\leqslant l\leqslant k$ 使 $|f_l(y)-f_{k+1}(y)|\geqslant a>0$.

---

* 收稿日期：2003-07-06

基金项目：广西自然科学基金资助项目(0448036); 广西教育厅科研基金资助项目

作者简介：魏文展(1952-), 男, 广西桂林, 博士, 教授, 主要从事空间几何理论方面的研究.

注 1　由引理 1 知 X 为光滑的[2] 当且仅当 $\forall x\in S, y\in S$. x 为 $\mathrm{span}\{x, y\}$ 的光滑的[2].

定义 2　$x\in S$ 称为 X 的 k-G 可微点, 若 X 的范数满足下列条件, 对 $\forall \varepsilon>0$, Y_x, $\exists\lambda(x, \varepsilon, Y_x)>0$使

$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y, \sigma\rangle\right|<\varepsilon,$$

若 X 的单位球面上每一点均为 k-G 可微点, 称 X 为 k-G 可微空间.

注 2　易见 x 为 $1-G$ 可微点等价于 x 为 Gateaux[2] 可微点, 因此 k-G 可微为 Gateaux[2] 可微的推广(下面可看到其为严格推广).

定义 3　对 $x\in S$, 及 Y_x, 称支撑映射[2] $\sigma: S\to S^*$ 在 x 点依 Y_x 范数到 w^* 下半连续, 若 $\forall\{x_n\}\subset S$, 当 $x_n\to x$, 有　$\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{\sigma\in\sum(x)}|\langle y, \sigma_{(x_n)}\rangle-\langle y, \sigma\rangle|\to 0$.

定理 1　X 为 Banach 空间, 对 $x\in S$ 下列等价

(i) x 点是 k-光滑点;

(ii) $\forall Y_x$, 则每个支撑映射 $\sigma: S\to S^*$ 在 x 点依 Y_x 范数到 w^* 下半连续;

(iii) $\forall Y_x$, 则存在一个支撑映射 $\sigma: S\to S^*$ 在 x 点依 Y_x 范数到 w^* 下半连续;

(iv) x 为 k-G 可微点.

证　(i)$\Rightarrow$(ii), 设$\{x_n\}\subset S$, $x_n\to x$. 任取 Y_x, 再任取支撑映射 $\sigma: S\to S^*$ 由于 x 为X 的 k-光滑点, 由引理 1 知存在 $y_0\in S$, 使 x 为 $\mathrm{span}\{x, y_0\}$ 的光滑点. 故

$$\sigma_{(x_n)}\Big|\ \mathrm{span}\{x, y_0\}\xrightarrow{w^*}\sigma_{(x)}\Big|\ \mathrm{span}\{x, y_0\},$$

即有
$$\langle y_0, \sigma_{(x_n)}\rangle\to\langle y_0, \sigma\rangle, \tag{1}$$
从而
$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}|\langle y, \sigma_{(x_n)}\rangle-\langle y, \sigma\rangle|\leqslant\sup_{\sigma\in\sum(x)}|\langle y_0, \sigma_{(x_n)}\rangle-\langle y_0, \sigma\rangle|$$
$$=|\langle y_0, \sigma_{(x_n)}\rangle-\langle y_0, \sigma\rangle|.$$

再由(1)知(ii)成立(最后一等式是由于 x 为 $\mathrm{span}\{x, y_0\}$ 的光滑点, 从而

$$\sum(x)\Big|_{\mathrm{span}\{x, y_0\}}=\left\{\sigma\Big|_{\mathrm{span}\{x, y_0\}}: \sigma\in\sum(x)\right\}$$ 为单点集).

(ii)$\Rightarrow$(iii)显然.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $\forall Y_x$, 令 $\sigma: S\to S^*$ 的一个支撑映射, 且在 x 点依 Y_x 范数到 w^* 下半连续.

则 $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $0<\varepsilon<1$, 则 $\exists\delta=\delta(\varepsilon, x, Y_x)>0$, 使 $\delta<\varepsilon$, $\delta<\frac{1}{3}$, 且当 $0<\lambda<\delta$时有

$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}|\langle y, \sigma\rangle-\langle y, \sigma_{(x+\lambda y)}\rangle|<\varepsilon.$$

由[2] 引理 5.2.11 及推论知对 $\forall y\in S(Y_x)$有

$$\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\frac{\langle y, \sigma\rangle}{\|x\|}\right|\leqslant\frac{|\lambda|}{1-|\lambda|}+\frac{1}{1-|\lambda|}|\langle y, \sigma\rangle-\langle y, \sigma_{(x+\lambda y)}\rangle|,$$

从而

$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\frac{\langle y, \sigma\rangle}{\|x\|}\right|$$
$$\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}|\langle y, \sigma\rangle-\langle y, \sigma_{(x+\lambda y)}\rangle|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}+\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\leqslant\frac{\delta+\varepsilon}{1-\delta}\leqslant 3\varepsilon.$$

(iv)$\Rightarrow$(i)反之, 若 x 不为 X 的 k-的光滑点, 由引理 2 知存在 $f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}\in\sum(x)$且线性无关, 及存在 Y_x 以及 $a>0$, 使 $\left|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|\geqslant a>0$. 则

$$\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y,\sigma\rangle\right|$$
$$\geqslant\sup_{\sigma\in\{f_i\}_{i=1}^{k+1}}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y,\sigma\rangle\right|$$
$$\geqslant\max\left\{\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|,\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\min_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|\right\}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|+\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\min_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left|\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)-\min_{1\leqslant i\leqslant k+1}f_i(y)\right|\geqslant\frac{a}{2},$$

与(iv)矛盾！从而(i)成立.

注 3 由定理 1 及注 2 知文[2]定理 5.2.11 即为定理 1, $k=1$ 时的情形.

定理 2 X 为 k-光滑的 Banach 空间当且仅当 $\forall x\in S, Y_x$, 及 $\{f_n\}\subset S^*$, $\{g_n\}\subset S^*$ 若 $f_n(x)\to 1, g_n(x)\to 1(n\to\infty)$, 则 $\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m(y)-g_m(y)|\to 0$.

证 设 X 为 k-光滑的 Banach 空间, 若存在 $\varepsilon_0>0$, $x\in S$, Y_x 以及 $\{f_n\}\subset S^*$, $\{g_n\}\subset S^*$, 虽有 $f_n(x)\to 1$, $g_n(x)\to 1$, $(n\to\infty)$ 但 $\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m(y)-g_m(y)|\geqslant\varepsilon_0$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\forall y\in S(Y_x)$, $n\in N$, 有 $\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m(y)-g_m(y)|\geqslant\varepsilon_0$, 则存在 $m_n\in(nk+1,(n+1)k+1]$ 使

$$|f_{m_n}(y)-g_{m_n}(y)|\geqslant\varepsilon_0,\tag{2}$$

且易见 $m_1\leqslant m_2\leqslant\cdots\leqslant m_n\leqslant m_{(n+1)}\leqslant,\cdots, m_n\to\infty(n\to\infty)$. 注意到

$$f_{m_n}(x)\to 1,\ g_{m_n}(x)\to 1\quad(n\to\infty).\tag{3}$$

由(2)(3)知 x 不为 $\mathrm{span}\{x,y\}$ 的光滑点, 再由 $y\in S(Y_x)$的任意性及引理 1 知 x 不为 X 的 k-光滑点, 此与 X 为 k-光滑的相矛盾！

反之, 若 X 不为 k-光滑的, 则存在 $x\in S$, x 不为 X 的 k-光滑点, 由引理 2 知, 有 $f_1, f_2, \cdots, f_{k+1}\in\sum(x)$且线性无关, 及存在 Y_x 以及 $a>0$, 使 $Y_x\subset\ker f_{k+1}$.
并且 $\forall y\in S(Y_x)$, $\exists l$, $1\leqslant l\leqslant k$, 使 $|f_l(y)-f_{k+1}(y)|\geqslant a>0$.

取
$$g_m=f_{k+1},\ (m=1,2,\cdots),$$
$$f_m^1=\begin{cases}f_m, & 1\leqslant m\leqslant k+1\\ f_{m-nk-1} & nk+1<m\leqslant(n+1)k+1\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则
$$g_m(x)=1,\quad f_m^1(x)=1\quad(m=1,2,\cdots).\tag{4}$$

知 $\forall y\in S(Y_x)$, $n\in N$ 有

$$\sup_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m^1(y)-g_m(y)|=\sup_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_{m-nk-1}(y)-f_{k+1}(y)|$$
$$=\sup_{1\leqslant l\leqslant k}|f_l(y)-f_{k+1}(y)|\geqslant a,$$

则
$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m^1(y)-g_m(y)|\geqslant a>0.\tag{5}$$

由(4)(5)便知与题设矛盾！

由定理 2, 当 $k=1$ 时即得

推论 1 X 为光滑的 Banach 空间当且仅当任取 $x\in S(X)$及 $\{f_n\}\subset S(X^*)$, $\{g_n\}\subset S(X^*)$, 若 $f_n(x)\to 1$, $g_n(x)\to 1$ 则 $f_n-g_n\xrightarrow{w^*}0$.

再由引理 1 及仿定理 2 的证明不难得到,

推论 2　X 为 k-光滑的 Banach 空间当且仅当任取 $x\in S(X)$ 及 Y_x 和 $\{f_n\}\subset S(X^*)$，若 $f_n(x)\to 1$ 则任取 $f\in\sum(x)$ 有 $\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{m\in(nk+1,(n+1)k+1]}|f_m(y)-f(y)|\to 0$.

推论 3　X 为 k-光滑的 Banach 空间当且仅当任取 $x\in S(X)$ 及 Y_x 和 $\{f_n\}\subset S(X^*)$，若 $f_n(x)\to 1$ 则 $\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\sup\limits_{f\in\sum(x)}|f_n(y)-f(y)|\to 0$.

定理 3　对 Banach 空间 X 下列等价

(i)　X 为 k-光滑的；

(ii)　$\forall x\in S(X)$ 及 Y_x，则 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\inf\limits_{y\in S(Y_x)}\dfrac{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|}{\lambda}\to 0$;

(iii)　$\forall x\in S(X)$ 及 Y_x，则 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\inf\limits_{y\in S(Y_x)}F(x,\lambda)(y)\to 0$;

(iv)　X 为 k-G 可微空间.

证　(i)⇒(ii)，若(ii)不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$，$x\in S$，Y_x 以及数列 $\{\lambda_k\}$，$\lambda_k>0(k=1,2,\cdots)$ 且 $\lambda_k\to 0$ 使

$$\inf_{y\in S(Y_x)}\frac{\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|}{\lambda_k}\geqslant\varepsilon_0.\tag{6}$$

对每个 $y\in S(Y_x)$ 及 $\lambda_k>0$，选取 $f_{ky}\in S(X^*)$，$g_{ky}\in S(X^*)$ 使

$$f_{ky}(x)+\lambda_k f_{ky}(y)>\|x+\lambda_k y\|-\lambda_k^2,\tag{7}$$

$$g_{ky}(x)+\lambda_k g_{ky}(y)>\|x-\lambda_k y\|-\lambda_k^2,\tag{8}$$

于是

$$\begin{aligned}\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|-2\lambda_k^2&<f_{ky}(x)+g_{ky}(x)+\lambda_k(f_{ky}-g_{ky})(y)\\&\leqslant 2+\lambda_k(f_{ky}-g_{ky})(y).\end{aligned}$$

联合(6)便得

$$2+\lambda_k\varepsilon_0-2\lambda_k^2<\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|-2\lambda_k^2\leqslant 2+\lambda_k(f_{ky}-g_{ky})(y),$$

则

$$(f_{ky}-g_{ky})(y)>\varepsilon_0-2\lambda_k.\tag{9}$$

由(7)(8)知，当 $k\to\infty$ 时

$$f_{ky}(x)\to 1,\ g_{ky}(x)\to 1.\tag{10}$$

由(9)(10)知，x 不为 $\operatorname{span}\{x,y\}$ 的光滑点，再由 $y\in S(Y_x)$ 的任意性及引理 1 知 x 不为 X 的 k-光滑点，矛盾！

(ii)⇒(iii)若存在 $x\in S(X)$，$\varepsilon_0>0$，Y_x 及收敛于零的正数列 $\{\lambda_k\}$ 使得对任取 $y\in S(Y_x)$ 及每个 $\lambda_k>0$ 有 $F(x,\lambda_k^2)\geqslant\varepsilon_0$ 而

$$\|x+\lambda_k y\|\geqslant\sup\{f(x+\lambda_k y):f\in F(x,\lambda_k^2)\}\geqslant 1-\lambda_k^2+\lambda_k\sup\{f(y):f\in F(x,\lambda_k^2)\},$$

$$\|x-\lambda_k y\|\geqslant\sup\{f(x-\lambda_k y):f\in F(x,\lambda_k^2)\}\geqslant 1-\lambda_k^2-\inf\{f(y):f\in F(x,\lambda_k^2)\},$$

则

$$\begin{aligned}&\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|-2\\&\geqslant-2\lambda_k^2+\lambda_k\left(\sup\{f(y):f\in F(x,\lambda_k^2)\}-\inf\{f(y):f\in F(x,\lambda_k^2)\}\right)\\&=-2\lambda_k^2+\lambda_k F(x,\lambda_k^2)(y)\\&\geqslant-2\lambda_k^2+\lambda_k\varepsilon_0.\end{aligned}$$

取 $K>0$ 使当 $k>K$ 时 $0<\lambda_k<\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon_0}{8}\right\}$ 则当 $k>K$ 时

$$\frac{\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|-2}{\lambda_k}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2},$$

知当 $k>K$ 时 $$\inf_{y\in S(Y_x)}\frac{\|x+\lambda_k y\|+\|x-\lambda_k y\|-2}{\lambda_k}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$$

与(ii)矛盾!

(iii)⇒(iv)由于 $\forall\sigma\in\sum(x)$, Y_x 有 $\forall y\in S(Y_x)$

$$\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y,\sigma\rangle\right|=\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|+\langle x-\lambda y,\sigma\rangle-2}{\lambda}\right|$$
$$\leqslant\frac{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|-2}{\lambda},$$

从而

$$\inf_{y\in S(Y_x)}\sup_{\sigma\in\sum(x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-\langle y,\sigma\rangle\right|$$
$$\leqslant\inf_{y\in S(Y_x)}\left|\frac{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|-2}{\lambda}\right|\to 0\quad(\lambda\to 0)$$

知(iii)⇒(iv)成立.

由定理 1 知(iv)⇒(i)成立. 证毕.

参考文献:

[1] 南朝勋, 王建华. k-严格凸性与 k-光滑性[J]. 数学年刊 A 辑, 1990, 11(3): 321-324.

[2] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

[3] 方习年. 关于 Banach 空间 k 一致凸性与 k 一致光滑性[J]. 数学研究与评论, 2000, 20(4), 584-587.

[4] Fang Xinian, Wang Yuanzheng. On the k-smoothness and k-strong smoothness[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1997, 12(2), 36-41.

[5] 方习年. 关于一致凸性与一致光滑性[J]. 淮北煤师院学报, 1996, 20(4): 13-17.

[6] 魏文展, 刘培德. 复空间的 PL 一致凸性及其鞅刻划[J]. 科学通报, 1997, 42(3), 234-238.

[7] Diestel, J.. Geometry of Banach space-selected topics[J]. Lecture notes in Math, Springer Verlag, 1975, (485): 628-636.

[8] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

ON k-SMOOTHNESS OF BANACH SPACES

WEI Wen-zhan[1], CHENG Qing-jin[2], DONG Ge[1]

(1. *Guangxi Economic and Trade Polytechnic*, *Nanning* 530021, *China*)

(2. *Dept. of Math.*, *Xiamen University*, *Xiamen* 361005, *China*)

(3. *Dept. of Math.*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200436, *China*)

Abstract: In this paper, we study k-smooth Banach spaces. We introduce a notion of k-G differentianility. By using it, we give several equivalent conditions of k-smooth Banach spaces.

Key words: k-smoothness; k-G differentiability; supporting maping

2000 MR Subject Classification: 46B09