第 45 卷　第 2 期
2006 年 3 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol.45　No.2
Mar. 2006

直觉模糊群与它的诱导商群

林 梦 雷
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361500)

摘要: 根据 Atanassov K 所定义的直觉模糊集的概念, 给出一个直觉模糊集为直觉模糊群的充要条件; 引入直觉模糊群关于它的正规子群的诱导商集的概念; 利用代数思想及方法证明直觉模糊群的诱导商集也是直觉模糊群. 该结论完整地解决了一个直觉模糊群关于它的正规子群的商集的问题.

关键词: 直觉模糊集; 直觉模糊群; 直觉模糊群的诱导商集; 直觉模糊群的诱导商群; 直觉模糊正规子群
中图分类号: O 159　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)02-0157-05

经典的 Cantor 集合论只能描述“非此即彼”的“分明概念”. Zadeh 的模糊集理论是对经典集合的有效推广. 20 世纪 80 年代, 保加利亚数学家 Atanassov[1] 给出直觉模糊集合(Intuitionistic Fuzzy Sets)是对 Zadeh 模糊集理论最有影响的一种扩充和发展, 因此引起众多学者的关注, 文献[3, 4] 侧重于代数方面的探讨, 但没有解决一个直觉模糊群关于它的正规子群的商集的问题. 本文引入直觉模糊群关于它的正规子群的诱导商集的概念; 同时证明直觉模糊群关于它的正规子群的诱导商集也是直觉模糊群等结论.

1　预备知识与符号

定义 1[2]　设 X 是一个非空集合, X 上形如

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$

的三重组称为 X 上的一个直觉模糊集. 其中, 函数 $\mu_A(x): X\to[0,1]$ 和 $\nu_A(x): X\to[0,1]$ 分别表示 X 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, 并且满足 $0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$, $\forall x\in X$. 事实上, 这里的 μ_A, ν_A 即为普通模糊集的隶属函数. 令 IFS[X] 表示 X 上所有直觉模糊集构成的集合.

设　$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}\in$ IFS[X]

记　$[\,]A=\{\langle x, \mu_A(x), 1-\nu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$.

定义 2[3]　设 G 是经典群, G 上的一个直觉模糊子集

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in G\}$

如果满足:

(i) $\mu_A(xy)\geqslant\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$,

$\nu_A(xy)\geqslant\max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$, $\forall x, y\in G$.

(ii) $\mu_A(x^{-1})\geqslant\mu_A(x)$,

$\nu_A(x^{-1})\leqslant\nu_A(x)$, $\forall x\in G$.

则称 A 为 G 上的一个直觉模糊群.

令 IFG[G] 表示群 G 上所有直觉模糊群构成的集合.

定义 3[4]　设 G 是经典群, G 上的一个直觉模糊群

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in G\}\in$ IFG[G]

若还满足

$\mu_A(xyx^{-1})\geqslant\mu_A(y)$, $\nu_A(xyx^{-1})\leqslant\nu_A(y)$,

$\forall x, y\in G$,

则称 A 为 G 上的一个直觉模糊正规子群.

令 IFNG[G] 表示 G 上所有直觉模糊正规子群的全体所构成的集合.

引理 4[5]　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元,

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in G\}\in$ IFG[G],

则

$\mu_A(x)\leqslant\mu_A(e)$; $\nu_A(x)\geqslant\nu_A(e)$, $\forall x\in G$.

2　主要结论

命题 5　设 G 是经典群,

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in G\}\in$ IFG[G],

则[ ] $A\in$ IFG[G].

证　由[ ] A 及直觉模糊群的定义即得.

定理 6　设 G 是一个经典群, e 是 G 上单位元,

$A=\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x\in G\}\in$ IFS[G],

则 $A\in$ IFG[G] 的充要条件为

(i) 当 $\mu_A(x)<\mu_A(y)$ 时, $\mu_A(xy)=\mu_A(x)$,

$\forall x, y\in G$.

收稿日期: 2005-04-28
基金项目: 漳州师院科研基金(SK03005)资助
作者简介: 林梦雷(1963—), 在职硕士研究生. 现在漳州师范学院工作. E-mail: linmenglei2004@sina.com

(ii) 当 $\nu_A(x) > \nu_A(y)$ 时, $\nu_A(xy) = \nu_A(x)$, $\forall x, y \in G$.

证 必要性 由定义 2 及命题 5, 我们只须对 ν_A 进行讨论即可. 设

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

则

$$\nu_A(x) \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}, \ \forall x, y \in G.$$

所以当

$\nu_A(x) > \nu_A(y)$ 时, $\nu_A(xy) \leqslant \nu_A(x)$.

而

$$\nu_A(x) = \nu_A(xyy)^{-1} \leqslant \max\{\nu_A(xy), \nu_A(y^{-1})\} \leqslant \max\{\nu_A(xy), \nu_A(y)\} \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} = \nu_A(x),$$

所以

$$\nu_A(x) = \max\{\nu_A(xy), \nu_A(y)\}.$$

因此有 $\nu_A(xy) = \nu_A(x)$.

充分性 设

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFS}[G],$$

且满足条件(ii). 若 $\exists x \in G$ 使

$$\nu_A(x^{-1}) > \nu_A(x),$$

则

$$\nu_A(e) = \nu_A(x^{-1}x) = \nu_A(x^{-1}) > \nu_A(x),$$

于是有 $\nu_A(e) = \nu_A(ex) = \nu_A(x)$ 矛盾. 于是 $\forall x \in G$ 均有

$$\nu_A(x^{-1}) \leqslant \nu_A(x).$$

其次, $\forall x, y \in G$. 若 $\nu_A(x) \leqslant \nu_A(y)$ 且

$$\nu_A(xy) > \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} = \nu_A(y) \geqslant \nu_A(y^{-1}),$$

则 $\nu_A(y) \geqslant \nu_A(x) = \nu_A(xyy)^{-1} = \nu_A(xy)$ 矛盾. 所以 $\forall x, y \in G$, 均有

$$\nu_A(xy) \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}.$$

又根据条件(i) 类似可得 $\mu_A(x^{-1}) \geqslant \mu_A(x)$, 且

$$\mu_A(xy) \geqslant \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \ \forall x, y \in G.$$

因此我们可以得到定理 6 的一个推论.

推论 7 设 G 是经典群,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G]$$

若 $\nu_A(x) < \nu_A(y)$ 时, 成立

$$\nu_A(xy) = \nu_A(y), \ \forall x, y \in G.$$

证 $\nu_A(xy) \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} = \nu_A(y)$,

$$\nu_A(y) = \nu_A(x^{-1}xy) \leqslant \max\{\nu_A(x^{-1}), \nu_A(xy)\} \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(xy)\} \leqslant \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} = \nu_A(y).$$

所以 $\nu_A(xy) = \nu_A(y)$.

命题 8 设 G 是经典群,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

$H \lhd G$, 且 $\nu_A(aH) \cap \nu_A(H) = \phi$, $a \in G$. 则成立

(i) $\nu_A(x) > \nu_A(h)$, $\forall x \in aH$, $\forall h \in H$.

(ii) $\nu_A(x) > \nu_A(y)$, $\forall x, y \in aH$.

其中, $\nu_A(aH)$ 和 $\nu_A(H)$ 分别表示 aH 和 H 在 ν_A 下的像集.

证 由条件 $\nu_A(aH) \cap \nu_A(H) = \phi$ 知 $\forall x \in aH$, $h \in H$, 均有 $\nu_A(x) \neq \nu_A(h)$, 若 $\exists x \in aH$, $\exists h \in H$, 使得 $\nu_A(x) < \nu_A(h)$, 由推论 7 知 $\nu_A(xh) = \nu_A(h)$, 但 $xh \in aH$, $h \in H$, 这与 $\nu_A(aH) \cap \nu_A(H) = \phi$ 矛盾, 所以

$$\nu_A(x) > \nu_A(h), \ \forall x \in aH, \ \forall h \in H.$$

(i) 式成立.

令 $x, y \in aH$, 且 $x = ah_1$, $y = ah_2$, 则由(i) $\nu_A(a) > \nu_A(h_1)$, $\nu_A(a) > \nu_A(h_2)$, 因此

$$\nu_A(x) = \nu_A(ah_1) = \nu_A(a) = \nu_A(ah_2) = \nu_A(y),$$

(ii) 式成立.

推论 9 设 G 是经典群,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

$H \lhd G$, 且 $\mu_A(aH) \cap \mu_A(H) = \phi$, $a \in G$, 则成立

(i) $\mu_A(x) < \mu_A(h)$, $\forall x \in aH$, $h \in H$.

(ii) $\mu_A(x) = \mu_A(y)$, $\forall x, y \in aH$.

这里 $\mu_A(aH)$ 和 $\mu_A(H)$ 分别表示 aH 和 H 在 μ 下的像集.

证 根据命题 5

$$[\ ]A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

令 $\theta_A(x) = 1 - \mu_A(x)$, 则有

$$\theta_A(aH) \cap \theta_A(H) = \phi, a \in G.$$

由命题 8 可得(i) 和(ii) 式成立.

命题 10 设 G 是经典群,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

$$H \lhd G, \nu_A(aH) \cap \nu_A(H) \neq \phi, a \in G,$$

则成立 $\forall x \in aH$, $\exists h \in H$ 使 $\nu_A(x) \leqslant \nu_A(h)$.

证 因为 $\nu_A(aH) \cap \nu_A(H) \neq \phi$, $a \in G$, 所以 $\exists x_0 \in aH$, $\exists h_0 \in H$, 使 $\nu_A(x_0) = \nu_A(h_0)$. 现设 $x \in aH$, 若 $\nu_A(x) \leqslant \nu_A(x_0)$, 则定理成立.

若 $\nu_A(x) > \nu_A(x_0)$, 则由 $x_0H = aH$ 知, $\exists h \in H$ 使

$$x = x_0h \Rightarrow h = x_0^{-1}x,$$

所以

$$\nu_A(h) = \nu_A(x_0^{-1}x) = \nu_A(x),$$

总之, 定理都成立.

推论 11 设 G 是经典群,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle \mid x \in G\} \in \mathrm{IFG}[G],$$

$$H \lhd G, \mu_A(aH) \cap \mu_A(H) \neq \phi, a \in G,$$

则 $\forall x \in aH$, $\exists h \in H$ 使 $\mu_A(x) \geqslant \mu_A(h)$.

证　考虑

$$[\ ]A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

记

$$\lambda_A(x)=\mu_A(x),\theta_A(x)=1-\mu_A(x),\ \forall x\in G.$$

则

$$[\ ]A=\{\langle x,\lambda_A(x),\theta_A(x)\rangle\mid x\in G\}.$$

由 $\mu_A(aH)\cap\mu_A(x)\neq\phi\Rightarrow\theta_A(aH)\cap\theta_A(H)\neq\phi$. 根据命题 10 得推论 11 成立.

下面引入直觉模糊群在它正规子群上的诱导直觉模糊商集.

定义 12　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元, $H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

$$A/H\triangleq\{\langle y,\mu_{A/H}(y),\nu_{A/H}(y)\rangle\mid y\in G/H\},$$

其中

$$\mu_{A/H}(aH)=\begin{cases}\mu_A(e), & \mu_A(aH)\cap\mu_A(H)\neq\phi\\ \mu_A(a), & \mu_A(aH)\cap\mu_A(H)=\phi\end{cases}$$

$$\nu_{A/H}(aH)=\begin{cases}(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(a), & \nu_A(aH)\cap\nu_A(H)\neq\phi\\ \nu_A(e), & \nu_A(aH)\cap\nu_A(H)=\phi\end{cases}$$

(注: $(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(a)=\min\{(1-\mu_A(e)),\nu_A(a)\}$)

容易验证定义 12 中 A/H 是 G/H 上的一个直觉模糊集. 称它为 A 在正规子群 H 上的诱导直觉模糊商集. 记为 A/H.

例 13　取 $G=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ 为四元数群, 其运算为 $i^2=j^2=k^2=-1$,

$$ij=k=-ji,jk=i=-kj,ki=j=-ik.$$

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\},$$

其中

$$\mu_A(1)=0.95,\nu_A(1)=0.04,$$
$$\mu_A(\pm i)=0.6,\nu_A(\pm i)=0.25,$$
$$\mu_A(\pm j)=0.5,\nu_A(\pm j)=0.3,$$
$$\mu_A(\pm k)=0.5,\nu_A(\pm k)=0.3,$$
$$\mu_A(-1)=0.7,\nu_A(-1)=0.15,$$

现取 $H=\{1,\pm i,-1\}$, 则 $jH=\{\pm j,\pm k\}$,

$$\mu_A(jH)=\{0.5\},\nu_A(jH)=\{0.3\},$$
$$\mu_A(H)=\{0.95,0.6,0.7\},$$
$$\nu_A(H)=\{0.04,0.25,0.15\},$$
$$\mu_{A/H}(jH)=\mu_A(j)=0.5,$$
$$\nu_{A/H}(jH)=\nu_A(1)=0.04,$$

命题 14　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元, $H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

$\forall aH,bH\in G/H$, 若 $\mu_{A/H}(aH)<\nu_{A/H}(bH)$, 则 $\mu_A(aH)\cap\mu_A(H)=\phi$ 且 $\mu_A(a)<\mu_A(b)$.

证　由

$$\mu_{A/H}(aH)<\mu_{A/H}(bH),$$

得

$$\mu_{A/H}(aH)<\mu_A(e),$$

于是

$$\mu_{A/H}(aH)<\mu_A(a),$$

因此

$$\mu_A(aH)\cap\mu_A(H)=\phi.$$

若

$$\mu_A(bH)\cap\mu_A(H)=\phi\Rightarrow\mu_A(bH)=\mu_A(b)\Rightarrow \mu_A(a)<\mu_A(b).$$

若 $\mu_A(bH)\cap\mu_A(H)\neq\phi$, 由推论 11 及推论 9 $\exists h\in H$, 使

$$\mu_A(b)\geqslant\mu_A(h)>\mu_A(a).$$

推论 15　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元, $H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

$$\forall aH,bH\in G/H,$$

若

$$\mu_{A/H}(aH)<\mu_{A/H}(bH),$$

则

$$\mu_{A/H}(aHbH)=\mu_{A/H}(abH)=\mu_{A/H}(aH).$$

证　事实上, 当 $\mu_{A/H}(aH)<\mu_{A/H}(bH)$ 时, 必有 $\mu_A(abH)\cap\mu_A(H)=\phi$. 否则由推论 11, $\exists h_0\in H$ 使 $\mu_A(ab)>\mu_A(h_0)$, 由命题 14, $\mu_A(a)=\mu_A(ab)>\mu_A(h_0)$ 这与 $\mu_A(aH)\cap\mu_A(H)=\phi$ 矛盾. 因此

$$\mu_{A/H}(abH)=\mu_A(ab)=\mu_A(a)=\mu_{A/H}(aH).$$

命题 16　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元, $H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

$$aH,bH\in G/H,\nu_{A/H}(aH)>\nu_{A/H}(bH),$$

则 $\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$ 当且仅当 $\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$.

证　反设当 $\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$ 时, 有 $\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$, 则由命题 10 $\exists h'\in H$ 使 $\nu_A(a)\leqslant\nu_A(h')$. 又根据命题 8 的(i)有 $\nu_A(ab)>\nu_A(h')$. 而 $\nu_{A/H}(bH)<\nu_{A/H}(aH)$, 故 $\nu_A(b)\leqslant\nu_A(h')$, 所以 $\nu_A(ab)\leqslant\max\{\nu_A(a),\nu_A(b)\}\leqslant\nu_A(h')$, 这与 $\nu_A(ab)>\nu_A(h')$ 矛盾.

其次, 当 $\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$ 时, 如果 $\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)=\phi$, 则 $\nu_{A/H}(aH)=\nu_A(e)$. 由假设 $\nu_{A/H}(bH)<\nu_A(e)\leqslant1-\mu_A(e)$, 因此 $\nu_A(e)=\nu_{A/H}(aH)>\nu_{A/H}(bH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(b)=1-\mu_A(e)$, 即 $\mu_A(e)+\nu_A(e)>1$ 矛盾.

推论 17　设 G 是经典群, e 是 G 的单位元, $H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

$$aH,bH\in G/H,\nu_{A/H}(aH)>\nu_{A/H}(bH),$$

且

$$\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)\neq\phi,$$

则

$$\nu_A(bH)\cap\nu_A(H)\neq\phi.$$

证　由命题 16 知

$$\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)\neq\phi.$$

如果 $\nu_A(bH)\cap\nu_A(H)=\phi$,由命题 8 的(i),$\forall h\in H$,$\forall x\in bH$,有 $\mu_A(x)>\nu_A(h)$.而由命题 10,$\exists h_1\in H$,$h_2\in H$ 使 $\nu_A(ab)\leqslant\nu_A(h_1)$,$\nu_A(a)\leqslant\nu_A(h_2)$,从而有 $\nu_A(b)>\nu_A(h_1)\geqslant\nu_A(ab)$,$\nu_A(b)>\nu_A(h_2)\geqslant\nu_A(a)$.这与 $\nu_A(ab)=\nu_A(b)>\nu_A(h_1)$ 矛盾.

定理 18　设 G 是经典群,e 是 G 的单位元,$H\lhd G$.

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFG}[G],$$

则 $A/H=\{\langle y,\mu_{A/H}(y),\nu_{A/H}(y)\rangle\mid y\in G/H\}$,是 G/H 上的直觉模糊群.称为 A 在正规子群 H 上的诱导直觉模糊商群.

证　由推论 15 及定理 6 我们只须证 $\forall aH,bH\in G/H$,当 $\nu_{A/H}(aH)>\nu_{A/H}(bH)$ 时,成立

$$(*)\ \nu_{A/H}(abH)=\nu_{A/H}(aH)$$

即可.

当 $\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)=\phi$ 时,由命题 16 得 $\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)=\phi$.因此

$$\nu_{A/H}(abH)=\nu_A(e),$$
$$\nu_{A/H}(aH)=\nu_A(e)=\nu_{A/H}(abH).$$

当 $\nu_A(abH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$ 时,由命题 16 及推论 17 可得

$$\nu_A(aH)\cap\nu_A(H)\neq\phi,\ \nu_A(bH)\cap\nu_A(H)\neq\phi,$$

即

$$\nu_{A/H}(abH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(ab),$$
$$\nu_{A/H}(aH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(a),$$
$$\nu_{A/H}(bH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(b),$$

当 $\nu_A(ab)>1-\mu_A(e)$ 时,必有 $\nu_A(a)\geqslant 1-\mu_A(e)$,即($*$)式成立.否则 $\nu_A(a)<1-\mu_A(e)$.

$$\nu_{A/H}(aH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(a)=\nu_A(a).$$

由已知条件 $\nu_A(b)<1-\mu_A(e)$,但 $\nu_A(ab)\leqslant\max\{\nu_A(a),\nu_A(b)\}<1-\mu_A(e)$ 矛盾.

当 $\nu_A(ab)\leqslant 1-\mu_A(e)$ 时,必有 $\nu_A(a)\leqslant 1-\mu_A(e)$,从而有 $\nu_A(b)<\nu_A(a)$,($*$)式也成立.若不然,$\nu_A(a)>1-\mu_A(e)$,

$$\nu_{A/H}(bH)=(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(b)=\nu_A(b)<\nu_A(a).$$

于是 $\nu_A(ab)=\nu_A(a)>1-\mu_A(e)$ 矛盾.

综上所述,当 $\nu_{A/H}(aH)>\nu_{A/H}(bH)$ 时,成立 $\nu_{A/H}(abH)=\nu_{A/H}(aH)$.

定理 19　设 G 是经典群,

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}\in \mathrm{IFNG}[G],$$

$H\lhd G$,则

$$A/H=\{\langle y,\mu_{A/H}(y),\nu_{A/H}(y)\rangle\mid y\in G/H\}$$

为 G/H 上的一个直觉模糊正规子群.

证　由定理 18 得知 A/H 是 G/H 上的直觉模糊群.

$$\forall x=aH\in G/H,\ y=bH\in G/H,$$

$$\mu_{A/H}(xyx^{-1})=\mu_{A/H}(aba^{-1}H)=\begin{cases}\mu_A(e), & \mu_A(aba^{-1}H)\cap\mu_A(H)\neq\phi\\ \mu_A(aba^{-1}), & \mu_A(aba^{-1}H)\cap\mu_A(H)=\phi\end{cases}$$

$$\mu_{A/H}(y)=\mu_{A/H}(bH)=\begin{cases}\mu_A(e), & \mu_A(bH)\cap\mu_A(H)\neq\phi\\ \mu_A(b), & \mu_A(bH)\cap\mu_A(H)=\phi\end{cases}$$

当 $\mu_A(bH)\cap\mu_A(H)=\phi$ 时,由

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in G\}$$

是直觉模糊正规子群,显然有

$$\mu_{A/H}(xyx^{-1})\geqslant\mu_{A/H}(y).$$

而当 $\mu_A(bH)\cap\mu_A(H)\neq\phi$ 时,必有

$$\mu_A(aba^{-1}H)\cap\mu_A(H)\neq\phi.$$

否则,若 $\mu_A(aba^{-1}H)\cap\mu_A(H)=\phi$.

由于 $\mu_A(bH)\cap\mu_A(H)\neq\phi$,由推论 11 所以 $\forall z\in bH$,$\exists h'\in H$,使 $\mu_A(z)\geqslant\mu_A(h')$,即 $\forall h\in H$,有

$$\mu_A(bh)\geqslant\mu_A(h'),$$

特别地,有 $\mu_A(bh')\geqslant\mu_A(h')$,$\mu_A(b)\geqslant\mu_A(h')$.又 $\mu_A(aba^{-1}H)\cap\mu_A(H)=\phi$,由推论 9 则 $\forall w\in aba^{-1}H$,$\forall h\in H$,有 $\mu_A(w)<\mu_A(h)$.于是 $\mu_A(aba^{-1})<\mu_A(h')$.

由假设 A 是直觉模糊正规子群,即 $\mu_A(aba^{-1})\geqslant\mu_A(b)\Rightarrow\mu_A(b)<\mu_A(h')$ 矛盾.故成立 $\mu_{A/H}(xyx^{-1})\geqslant\mu_{A/H}(y)$.

另一方面

$$\nu_{A/H}(xyx^{-1})=\nu_{A/H}(aba^{-1}H)=\begin{cases}(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(aba^{-1}), & \nu_A(aba^{-1}H)\cap\nu_A(H)\neq\phi\\ \nu_A(e), & \nu_A(aba^{-1}H)\cap\nu_A(H)=\phi\end{cases}$$

$$\nu_{A/H}(y)=\nu_{A/H}(bH)=\begin{cases}(1-\mu_A(e))\wedge\nu_A(b), & \nu_A(bH)\cap\nu_A(H)\neq\phi\\ \nu_A(e), & \nu_A(bH)\cap\nu_A(H)=\phi\end{cases}$$

当 $\nu_A(bH)\cap\nu_A(H)\neq\phi$ 时,由于 A 是直觉模糊正规子群,必成立

$$\nu_{A/H}(xyx^{-1})\leqslant\nu_{A/H}(y).$$

而当 $\nu_A(bH)\cap\nu_A(H)=\phi$ 时,必有

$$\nu_{A/H}(aba^{-1}H)\leqslant\nu_A(e),$$

从而

$$\nu_{A/H}(xyx^{-1}) \leqslant \nu_{A/H}(y),$$

否则

$$\nu_{A/H}(aba^{-1}H) > \nu_A(e).$$

于是可知

$$\nu_A(aba^{-1}H) \cap \nu_A(H) \neq \phi.$$

又因为

$$\nu_{A/H}(y) = \nu_{A/H}(bH) = \nu_A(e),$$

因此有

$$\nu_{A/H}(y^{-1}) = \nu_{A/H}(b^{-1}H) = \nu_A(e),$$

所以

$$\nu_A(b^{-1}H) \cap \nu_A(H) = \phi,$$

且

$$\nu_{A/H}(xyx^{-1}) > \nu_{A/H}(y^{-1}),$$

即

$$\nu_A(aba^{-1}H) > \nu_{A/H}(b^{-1}H),$$

由推论 17 得 $\nu_A(b^{-1}H) \cap \nu_A(H) \neq \phi$ 矛盾, 从而有

$$\nu_{A/H}(xyx^{-1}) \leqslant \nu_{A/H}(y),\ \forall x, y \in G/H,$$

即 A/H 是 G/H 上的一个直觉模糊正规子群.

参考文献:

[1] Atanassov K. Review and results on intuitionistic fuzzy sets[J]. IM-MFAIS1, 1988.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87—96.

[3] 李晓萍, 王贵君. 直觉模糊群与它的同态像[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 45—50.

[4] 李晓萍, 赵建红. 直觉模糊正规子群与它的同态像特征[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2004, 36(1): 27—33.

[5] 林梦雷. 直觉模糊群与直觉模糊正规子群的水平子群[J]. 漳州师范学院学报: 自然科学版, 2005, 18(1): 7—9.

[6] ZadehLA. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338—353.

[7] Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61: 137—142.

[8] Doǧan Coker. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 88: 81—89.

[9] 张勤海. 抽象代数[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

Intuitionistic Fuzzy Group and Its Induced Quotient Group

LIN Meng-lei

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The concept of an intuitionistic fussy set was defined by Atanassov K. In this paper, necessary and sufficient conditions were given for whether an intuitionistic fussy set was an intuitionistic fussy group. The concept of the induced quotient set determined by an intuitionistic fussy group on its normal subgroup was introduced. By using algebraic methods, it was proved that the induced quotient set determined by an intuitionistic fussy group was still an intuitionistic fussy group. Thus the problem of a quotient set determined by an intuitionistic fussy group on its normal subgroup was completely solved. This research enriches the theory of a fussy group.

Key words: intuitionstic fuzzy set; intuitionstic fuzzy group; intuitionistic fuzzy induced quotient set; intuitionistic fuzzy group induced quotient group; intuitionistic fuzzy normal subgroups