第 45 卷　第 1 期
2006 年 1 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 45　No. 1
Jan. 2006

有限维结合代数的 Coxeter 矩阵

吕 洪 波
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: Coxeter矩阵理论在李理论, 有限维结合代数的表示理论等学科起着重要作用. 由Gabriel定理, 代数闭域上基的, 连通的有限维结合代数 A 同构于一个由连通有限箭图 $\vec{Q}$ 确定的路代数的商代数. 本文先证明了当 $\vec{Q}$ 中无有向圈时, 对顶点集适当排序后, A 的整体维数有限, 进而 A 的Cartan 矩阵在整数环上可逆. 然后利用 A 的 Cartan 矩阵和对称双线性型定义了 A 的基本反射, 并利用数学归纳法证明了在 $\vec{Q}$ 无有向圈的条件下, A 的 Coxeter 矩阵可分解为基本反射的乘积.

关键词: Cartan 矩阵; Coxeter 矩阵; 基本反射
中图分类号: O 152.6　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)01-0014-04

设 A 为代数闭域 k 上基的, 连通的有限维结合代数. 本文中的模总指有限维右 A 模, 并且不区分一个模和它的同构类. 设 $\{P(i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 A 的所有不可分解投射模的集合, $\{S(i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 A 的所有单模的集合, 这里 $P(i)$ 是 $S(i)$ 的投射盖. 代数 A 的 Cartan 矩阵 $\boldsymbol{C}_A = (c_{ij})$ 是如下定义的 $\mathbb{Z}$ 上的 $n \times n$ 阶矩阵: $c_{ij} = \dim_k \mathrm{Hom}_A(P(i), P(j))$, $\quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$. 需要注意的是: $\boldsymbol{C}_A$ 在 $\mathbb{Z}$ 上甚至在 $\mathbb{Q}$ 上都未必可逆. 由 [1], 如果 A 的整体维数有限, 则 $\boldsymbol{C}_A$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆.

假设 $\boldsymbol{C}_A$ 可逆. A 的 Coxeter 矩阵定义为:

$$\Phi_A = -\boldsymbol{C}_A^{\ T}\boldsymbol{C}_A.$$

由著名的 Gabriel 定理[2], 知道 $A = k\vec{Q}/I$, 这里 $k\vec{Q}$ 是由箭图 $\vec{Q} = (Q_0, Q_1)$ 确定的路代数, I 是 $k\vec{Q}$ 的理想, 其中 Q_0 是顶点集, Q_1 是箭集. 当 $\vec{Q}$ 中无有向圈时, 可以定义 A 的基本反射. 本文证明: 对 Q_0 适当排序后, A 的 Coxeter 矩阵可以分解为基本反射的乘积.

1　有限维结合代数的基本反射

设 $A = k\vec{Q}/I$, 其中 $k\vec{Q}$ 是由箭图 $\vec{Q} = (Q_0, Q_1)$ 确定的路代数, I 是 $k\vec{Q}$ 的理想, $Q_0 = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是顶点集, Q_1 是箭集. 记 $s(\rho)$ 和 $t(\rho)$ 分别为箭 $\rho \in Q_1$ 的始点和终点. $\vec{Q}$ 中的一条非平凡路是一个箭的序列: $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m, (m \geqslant 1)$, 且满足: $t(\rho_{i+1}) = s(\rho_i)$, $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$. 对于每个顶点 $i \in Q_0$, 有一条平凡路, 记为 e_i.

假定 $\vec{Q}$ 中无有向圈, 即对于任意的 $i \in Q_0$, 不存在 i 到 i 的非平凡路; 对于任意的 $i \neq j \in Q_0$, 如果存在 i 到 j 的非平凡路, 则一定不存在 j 到 i 的非平凡路.

引理 1　对 Q_0 适当排序后, A 的 Cartan 矩阵 $\boldsymbol{C}_A$ 为上三角形矩阵, 且主对角线元素为 1.

证明　因为对于任意的 $i \neq j \in Q_0$, 不存在 i, j 之间的有向圈, 所以对 Q_0 适当排序后, 可以满足: 如果 $\mathrm{Hom}_A(P(i), P(j)) \neq 0$, 则有 $i < j$. 所以, $\boldsymbol{C}_A$ 为上三角形矩阵. 又因为对于任意的 $i \in Q_0$, 不存在 i 到 i 的非平凡路, 所以 $\boldsymbol{C}_A$ 的主对角线元素为 1. 证毕.

引理 2　A 的整体维数有限, 从而 $\boldsymbol{C}_A$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆.

证明　只需证明每个单模 $S(i)$ 的投射维数不超过 i. 由于 $P(i)$ 是 $S(i)$ 的投射盖, 有短正合列:

$$0 \to \mathrm{Ker} f_0 \to P(i) \xrightarrow{f_0} S(i) \to 0,$$

设

$$\underline{\dim} P(i) = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 1, 0, \cdots, 0),$$

则

$$\underline{\dim} \mathrm{Ker} f_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 0, \cdots, 0),$$

于是有短正合列:

$$0 \to \mathrm{Ker} f_1 \to a_1 P(1) \oplus \cdots \oplus a_{i-1} P(i-1) \xrightarrow{f_1} \mathrm{Ker} f_0 \to 0,$$

设

$$\underline{\dim}(a_1 P(1) \oplus \cdots \oplus a_{i-1} P(i-1)) = (b_1, b_2, \cdots, b_{i-2}, a_{i-1}, 0, \cdots, 0),$$

则

$$\underline{\dim} \mathrm{Ker} f_1 = (b_1, b_2, \cdots, b_{i-2}, 0, \cdots, 0).$$

依次最多存在 i 个这样的短正合列, 所以对于任意的 $i \in Q_0$, $S(i)$ 的投射维数不超过 i, 即 A 的整体维数有限, 从而 Coxeter 矩阵 $\boldsymbol{C}_A$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆. 证毕.

记 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 是行向量, 记 α 的转置为 α^T.

定义 $\mathbb{Z}^n$ 上的双线性型 $\langle -, - \rangle_A$:

收稿日期: 2005-05-11
基金项目: 国家自然科学基金(10371101)资助
作者简介: 吕洪波(1978-), 男, 硕士研究生.
通讯联系人: 林亚南, ynlin@xmu.edu.cn

$\langle \alpha,\beta\rangle_A = \alpha C_A^{-T}\beta^T, \quad \forall\alpha,\beta\in Z^n,$

对应的对称双线性型$(-,-)_A$为:

$$(\alpha,\beta)_A = \frac{1}{2}\alpha(C_A^{-T}+C_A^{-1})\beta^T, \quad \forall\alpha,\beta\in Z^n,$$

定义

$\omega_i: Z^n\to Z^n$, $\omega_i(\beta)=\beta-2(\alpha_i,\beta)_A\alpha_i$, 对于任意的 $\alpha,\beta\in Z^n$,

这里 $\alpha_i=\underline{\dim}S(i)$ 为 $S(i)$ 的维数向量$(1\leqslant i\leqslant n)$. 称 ω_i 为 A 的基本反射. 由定义, 容易验证:

$\omega_i(\alpha_i)=-\alpha_i, \quad 1\leqslant i\leqslant n,$

且 ω_i 的不动点集为 $S=\{\alpha\in Z^n \mid \omega_i(\alpha)=\alpha\}=\{\alpha\in Z^n\mid(\alpha_i,\alpha)_A=0\}$.

本文的主要结果是:

定理　设 $A=k\vec{Q}/I$, 其中 $\vec{Q}$ 中无有向圈. 对顶点集 $Q_0=\{1,2,\cdots,n\}$ 适当排序后, 使得 $\mathrm{Hom}_A(P(i),P(j))\neq 0$, 则有 $i<j$. 设 A 的Cartan阵为 C_A, Coxeter阵为 Φ_A. 则对于任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in Z^n$, 有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Phi_A=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\omega_1\omega_2\cdots\omega_n.$$

注　如果 $\vec{Q}$ 中含有向圈, 则定理不成立.

例　设 A 是由下面带关系 的箭图 $\vec{Q}$ 确定的代数,

, $\alpha^2=\alpha$,

则 A 的 Cartan 矩阵 $C_A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$, Coxeter 矩阵 $\Phi_A=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$, $C_A^{-1}+C_A^{-T}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(0,2)$ 分别是单模 $S(1)$, $S(2)$ 的维数向量. 对于任意的 $\beta\in Z^2$, 基本反射 $\omega_i(\beta)=\beta-\alpha_i\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\beta^T\alpha_i$, $(i=1,2)$, 易知, $(1,0)\omega_1\omega_2=(-1,-1)\neq(-1,-2)=(1,0)\Phi_A$.

2　主要结果的证明

对 A 的单模个数 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, A 为单点代数, 结论成立.

当 $n=2$ 时, 经过适当排序后, 设 Cartan 阵 $C_A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$. 单模 $S(1)$, $S(2)$ 的维数向量 $\alpha_1=(1,0)$, $\alpha_2=(0,1)$ 构成 Z^2 的一组生成元, 记 $q_2=C_A^{-1}+C_A^{-T}$, 则

$$C_A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix},$$

$$q_2=C_A^{-1}+C_A^{-T}=\begin{pmatrix}2&-a\\-a&2\end{pmatrix},$$

$$\Phi_A=-C_A^{-T}C_A=\begin{pmatrix}-1&-a\\a&a^2-1\end{pmatrix},$$

显然$(\alpha_1)\omega_1=(-1,0)$, 且

$$(-1,0)\omega_2=(-1,0)-(0,1)\begin{pmatrix}2&-a\\-a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}(0,1)=(-1,-a),$$

于是有$(\alpha_1)\omega_1\omega_2=(\alpha_1)\Phi_A$. 又因为

$$(\alpha_2)\omega_1=(0,1)-(1,0)\begin{pmatrix}2&-a\\-a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,0)=(a,1),$$

$$(a,1)\omega_2=(a,1)-(0,1)\begin{pmatrix}2&-a\\-a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}\cdot(0,1)=(a,a^2-1),$$

故$(\alpha_2)\omega_1\omega_2=(\alpha_2)\Phi_A$. 所以对于任意的$(x_1,x_2)\in Z^2$, 有$(x_1,x_2)\omega_1\omega_2=(x_1,x_2)\Phi$, 结论成立.

假设单模个数为 $n-1$ 时结论成立. 设经过适当排序后, A 的Cartan阵为 C_{n-1}, Coxeter 阵为 Φ_{n-1}, 记 $q_{n-1}=C_{n-1}^{-1}+C_{n-1}^{-T}$, 单模 $S(i)$ 的维数向量 $\beta_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$(1出现在第 i 个分量位置)$(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 构成 Z^{n-1} 的一组生成元.

对任意$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in Z^{n-1}$, 有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\Phi_{n-1}=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-1}.$$

当 A 的单模个数为 n 时, 经过适当排序后, 设

$$C_n=\begin{pmatrix}C_{n-1}&B\\0&1\end{pmatrix},\quad 其中 B^T\in Z^{n-1},$$

则

$$C_n^{-1}=\begin{pmatrix}C_{n-1}^{-1}&-C_{n-1}^{-1}B\\0&1\end{pmatrix},$$

$$C_n^{-T}=\begin{pmatrix}C_{n-1}^{-T}&0\\-B^TC_{n-1}^{-T}&1\end{pmatrix},$$

$$q_n=C_n^{-1}+C_n^{-T}=\begin{pmatrix}q_{n-1}&-C_{n-1}^{-1}B\\-B^TC_{n-1}^{-T}&2\end{pmatrix},$$

$$\Phi_n=\begin{pmatrix}\Phi_{n-1}&-C_{n-1}^{-T}B\\B^TC_{n-1}^{-T}C_{n-1}&B^TC_{n-1}^{-T}B-1\end{pmatrix},$$

单模 $S(i)$ 的维数向量 $\alpha_i=(\beta_i,0)(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 与 $S(n)$ 的维数向量 $\alpha_n=(0,\cdots,0,1)$ 构成 Z^n 的一组生成元. 于是, 有

$$(\alpha_1)\omega_1=(\beta_1,0)-(\beta_1,0)\times\begin{pmatrix}q_{n-1}&-C_{n-1}^{-1}B\\-B^TC_{n-1}^{-T}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^T_1\\0\end{pmatrix}(\beta_1,0)=(\beta_1\varphi_1,0),$$

$$(\beta_1\varphi_1,0)\omega_2=(\beta_1\varphi_1,0)-(\beta_2,0)\times\begin{pmatrix}q_{n-1}&-C_{n-1}^{-1}B\\-B^TC_{n-1}^{-T}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\omega^T\beta_1\\0\end{pmatrix}(\beta_1,0)=$$

$(\beta_1 \omega_1 \omega_2, 0)$,

依次下去，由归纳假设，

$$(\alpha_1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1} = (\beta_1\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}, 0) = (\beta_1\Phi_{n-1}, 0),$$

$$(\beta_1\Phi_{n-1}, 0)\omega_n = (\beta_1\Phi_{n-1}, 0) - \alpha_n\begin{pmatrix} q_{n-1} & -C_{n-1}^{-1}B \\ -B^TC_{n-1}^{-T} & 2 \end{pmatrix}\times \begin{pmatrix}\beta_1\Phi_{n-1}^T 0\end{pmatrix}\alpha_n = (\beta_1\Phi_{n-1}, B^TC_{n-1}^{-T}\Phi_{n-1}^T\beta_1^T) = (\beta_1\Phi_{n-1}, -(\beta_1C_{n-1}^{-1}B)^T) = (\beta_1\Phi_{n-1}, -(\beta_1C_{n-1}^{-1}B)) = (\beta_1, 0)\Phi_n.$$

即有

$$(\alpha_1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}\omega_n = (\alpha_1)\Phi_n.$$

同理

$$(\alpha_i)\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}\omega_n = (\alpha_i)\Phi_n, (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

下面证明：$(\alpha_n)\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}\omega_n = (\alpha_n)\Phi_n$.

首先用数学归纳法证明：对任意 i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，有下面的(*)式成立，

$$(0, \cdots, 0, 1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_i = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_i(E + \sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1),$$

当 $i = 1$ 时，

$$(0, \cdots, 0, 1)\omega_1 = (0, \cdots, 0, 1) - (\beta_1, 0)\begin{pmatrix} q_{n-1} & -C_{n-1}^{-1}B \\ -B^TC_{n-1}^{-T} & 2\end{pmatrix}(0, \cdots, 0, 1)^T\times(\beta_1, 0) = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1).$$

当 $i = 2$ 时，

$$(\beta_1C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1)\omega_2 = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1) - (\beta_2, 0)\begin{pmatrix} q_{n-1} & -C_{n-1}^{-1}B \\ -B^TC_{n-1}^{-T} & 2\end{pmatrix}\times(\beta_1C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1)^T(\beta_2, 0) = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1).$$

其中 E 为 n 阶单位阵，E_{ij} 表示(i, j) 位置为1，其余位置为0的矩阵.

假设当 i 时，(*)式成立，当 $i+1$ 时，有

$$(0, \cdots, 0, 1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_i\omega_{i+1} = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_i(E + \sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}\times E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1)\omega_{i+1} = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_i(E + \sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}\times E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B, \beta_{i+1}(E + \sum_{t=1}^{i}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i} q_{n-1}E_{s_ts_2}q_{n-1}E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B, 0, \cdots, 0, 1).$$

故对任意 i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，(*)式成立. 于是，

$$(0, \cdots, 0, 1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1} = (\alpha, 1),$$

其中

$$\alpha = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_i(E + \sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}\times E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_{n-1}(E + \sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1})C_{n-1}^{-1}B).$$

其次，又得，

$$(0, \cdots, 0, 1)\omega_1\omega_2\cdots\omega_n = (\alpha, 1) - \alpha_n\begin{pmatrix} q_{n-1} & -C_{n-1}^{-1}B \\ -B^TC_{n-1}^{-T} & 2\end{pmatrix}(\alpha, 1)^T\alpha_n = (\alpha, \beta),$$

其中

$$\beta = B^TC_{n-1}^{T}(E_{11}E + E_{22}(E - q_{n-1}E_{11}) + \cdots + E_{ii}(E + \sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_ts_2}q_{n-1}\times E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1} + \cdots + E_{n-1\,n-1}(E + \sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} q_{n-1}E_{s_ts_t}q_{n-1}\times E_{s_{t-1}s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1s_1}))C_{n-1}^{-1}B - 1.$$

下面证明：$\alpha = B^TC_{n-1}^{-T}C_{n-1}$. 设

$$q_{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ a_{12} & 2 & \cdots & a_{2\,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1\,n-1} & a_{2\,n-2} & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$

则

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2\,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (c_{ij})_{(n-1)\times(n-1)},$$

可得：

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{t=1}^{j-1}(-1)^t\sum_{s=i+1}^{i-(t-1)} a_{is}a_{s\,s+1}\cdots a_{s+t-2\,j}, & i < j, \\ 1, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases}$$

于是，有：

$$\alpha = (\beta_1C_{n-1}^{-1}B, \beta_2(E - q_{n-1}E_{11})C_{n-1}^{-1}B, \cdots, \beta_i(E +$$

$$\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t \sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_t s_t}q_{n-1}E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})C_{n-1}^{-1}B,\ \cdots,\ \beta_{n-1}(E+\sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\times \sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} q_{n-1}E_{s_t s_t}q_{n-1}E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})C_{n-1}^{-1}B)=$$

$$(B^T C_{n-1}^{-T}\beta_1^T,\ B^T C_{n-1}^{-T}(E-E_{11}q_{n-1})\beta_2^T,\ \cdots,\ B^T C_{n-1}^{-T}(E+\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}\times E_{s_t s_t}q_{n-1}E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})^T\beta_i^T,\ \cdots,\ B^T C_{n-1}^{-T}\times (E+\sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} q_{n-1}E_{s_t s_t}q_{n-1} E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})^T\beta_{n-1}^T)= B^{-T}C_{n-1}^{-T}D,$$

其中

$$D=(d_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}=(\beta_1^T,\ (E-E_{11}q_{n-1})\beta_2^T,\ \cdots,\ (E+\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} q_{n-1}E_{s_t s_t}q_{n-1}\times E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})^T\beta_i^T,\ \cdots,\ (E+\sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\times \sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} q_{n-1}E_{s_t s_t}q_{n-1}E_{s_{t-1} s_{t-1}}\cdots q_{n-1}E_{s_1 s_1})^T\beta_{n-1}^T).$$

下面证明: $D=C_{n-1}$. 考察元素 d_{ij}

$$d_{ij}=\begin{cases}\beta_i(E+\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} E_{s_1 s_1} q_{n-1}E_{s_2 s_2}q_{n-1}\cdots E_{s_t s_t}q_{n-1})\beta_j^T, & i<j\\ 1, & i=j\\ 0, & i>j\end{cases}$$

比较 d_{ij} 与 c_{ij} 有 $D=C_{n-1}$.

下面证明: $\beta=B^T C_{n-1}^{-T}B-1$.

$$\beta^T=B^T C_{n-1}^{-T}(EE_{11}+(E-E_{11}q_{n-1})E_{22}+\cdots+(E+\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} E_{s_1 s_1}q_{n-1} E_{s_2 s_2}q_{n-1}\cdots E_{s_t s_t}q_{n-1})E_{ii}+\cdots+(E+\sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} E_{s_1 s_1}q_{n-1}E_{s_2 s_2}q_{n-1}\cdots E_{s_t s_t}q_{n-1})E_{n-1\ n-1})C_{n-1}^{-1}B-1,$$

由前面计算可得:

$$EE_{11}+(E-E_{11}q_{n-1})E_{22}+\cdots+(E+\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant i-1} E_{s_1 s_1}q_{n-1}E_{s_2 s_2}q_{n-1}\cdots E_{s_t s_2}q_{n-1})E_{ii}+\cdots+(E+\sum_{t=1}^{n-2}(-1)^t\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_t\leqslant n-2} E_{s_1 s_1}q_{n-1}E_{s_2 s_2}q_{n-1}\cdots E_{s_t s_t}q_{n-1})\times E_{n-1\ n-1}=C_{n-1},$$

即 $\beta^T=B^T C_{n-1}^{-T}B-1=\beta$.

所以, 当 A 的单模个数为 n 时, 对任意 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in \mathrm{Z}^n$, 有

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\omega_1\omega_2\cdots\omega_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Phi_n.$$

定理得证.

参考文献:

[1] Ringel C M. Tame algebras and integral quadraticforms [J]. Springer LNM, 1984: 1099.

[2] Gabriel P. Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras[J]. Representation of Algebras, Lecture Notes in Mathematics, 1980, 831: 1-77.

Coxeter Matrices of Finite Dimensional Associative Algebras

LV Hong-bo

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Coxeter matrices of finite dimensional associative algebras play an important role in many topics, such as Lie theory and the representation theory of associative algebras. From the famous Gabriel's theorem, a basic connected finite dimensional associative algebra A over an algebraically closed field can be looked as a quotient of a path algebra decided by a connected finite quiver Q. This pater first prove that A has finite global dimension, if Q has no oriented cycles. Then the concept of fundamental reflection of A is introduced. At last, this pater prove that the Coxeter matrix of A has a composition of the fundamental reflections with the condition that Q has no oriented cycles.

Key words: Cartan matrix; Coxeter matrix; fundamental reflection