烟台师范学院学报(自然科学版)
Yantai Normal University Journal(Natural Science)　2005, 21(3): 180—182

教学研究

应用 Green 定理解决渔业资源最优捕获问题

谭易兰[1], 王秀红[2]

(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 烟台师范学院数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘要: 利用马尔萨斯生物种群理论中的鱼口模型和 Verhulst 方程, 给出了时间和捕捞数量的关系, 然后利用定理, 得到了按照一定数量捕捞, 才能使恰当时间捕捞的鱼口数量最多的最优方案.

关键词: 鱼口模型; Green 定理; 最优捕获

中图分类号: O29; Q147　　文献标识码: A　　文章编号: 1004-4930(2005)03-0180-03

渔业、林业、畜牧业等与可再生资源有关的行业, 都存在资源最优利用的问题. 这一类问题受到经济学家的普遍关注, 本文以渔业生产为例, 利用高等数学的有关知识, 给出了一种渔业资源最优捕捞问题的方案.

关于生物种群包括鱼口的繁殖数学模型早在 1780 年便由马尔萨斯给出了其微分方程表达式

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha N(t), \tag{1}$$

其中 $\alpha > 0$ 为鱼口增长率, $N(0)$ 为 $t = 0$ 时刻鱼口数量, $N(t)$ 为 t 时刻鱼口的数量. 式(1) 的解为 $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$, 当 $\alpha > 0$ 时, 鱼口数量按几何级数增长, $\alpha < 0$ 时, 鱼口数量按几何级数衰减. 马尔萨斯的鱼口理论认为, 当食物充足时, 鱼口数量按几何级数增长, 但由于鱼的食物按照算术级数(等差级数) 增长, 易知鱼口增长率大于食物增长率. 鱼儿繁殖能力极强, 因为鱼儿产卵每次要产成千上万个, 如果这些鱼卵都变成小鱼, 那么海里供给鱼的食物就欠缺. 因此, 鱼儿的增长过程一方面随着鱼口数量增加, 产卵数量也随之增加, 从而促使鱼口数量进一步增加; 另一方面, 随鱼口数量 $N(t)$ 的增加, 寻找食物将更加困难, 因此鱼口数量有减少的趋势. 由以上分析可以清楚地看到, 当群体规模不很大, 上述模型是令人满意的. 但是当群体异常庞大时, 这个模型就不是很准确. 大约在 1837 年左右, 数学生物学家 Verhulst 又构造出生物种群数量变化更符合实际情况的方程 $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha N(t) - rN^2(t)$. 上式表明, 鱼口数量一方面随 $N(t)$ 增加而增加, 由 $\alpha N(t)$ 一项确定. 另一方面, 随 $N(t)$ 上升对鱼口的增长率也有抑制作用, 反映在 $rN^2(t)$ 这一项. 其中 α 和 r 为大于 0 的正实数. 现在我们假设捕鱼过程是一个可持续发展的过程, 一个捕鱼周期为 $[0, T]$. 开始时鱼口数为 $N(0)$, 在 t 时刻的鱼口数量为 $N(t)$, 且满足 $N(T) = N(0)$, 在 t 时刻捕鱼数量为 $k(t) \times N(t)$, 求 $k(t)$ 使在 $t = 0$ 到 $t = T$ 这段时间内捕鱼总量最大, 即系统目标函数为

$$\max J = \int_0^T k(t)N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

则谋求最大捕获量的数学模型为

$$\begin{cases} \max J = \int_0^T k(t)N(t)\,\mathrm{d}t, \\ s.t.\ \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha N(t) - rN^2(t) - k(t)N(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $N(0)$ 已知, $N(T) = N(0)$.

收稿日期: 2004-10-29

作者简介: 谭易兰(1981—), 男, 在读硕士研究生, 主要从事有限群表示理论的研究工作, (E-mail) tanyilan@126.com.

1　模型的求解

定义 1　系统初始位置位于时间状态平面$(t, N(t))$中的点$A(0, N(0))$. 从$A(0, N(0))$到$B(T, N(T))$有许多条轨线, 每条轨线代表一种策略, 我们把每一条轨线叫做一条可行轨线.

如图(1) 所示, Γ_1 和 Γ_2 就是两条可行轨线.

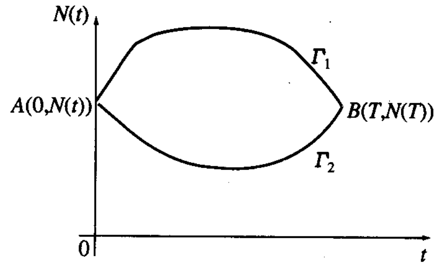

图 1　时间状态平面和可行轨线图

将(3) 中的限定条件 $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha N(t) - rN^2(t) - k(t)N(t)$ 变形得

$$k(t) = \frac{\alpha N(t) - rN^2(t) - \mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t}{N(t)}.$$

把上式带入目标函数(2)

$$J = \int_0^T \left[\alpha N(t) - rN^2(t) - \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t = \int_0^T \left[\alpha N(t) - rN^2(t)\right]\mathrm{d}t - \mathrm{d}N(t) = \int_{AB}\left[\alpha N(t) - rN^2(t)\right]\mathrm{d}t - \mathrm{d}N(t).$$

考虑$(t, N(t))$平面的任意两条可行轨线Γ_1, Γ_2, 沿Γ_1, Γ_2目标函数值分别记为J_{Γ_1}, J_{Γ_2}. 显然, J_{Γ_1}, J_{Γ_2}是第二型曲线积分值.

定义 2　Γ_1, Γ_2是$(t, N(t))$平面的任意两条可行轨线, 沿Γ_1, Γ_2目标函数值分别为J_{Γ_1}, J_{Γ_2}. 若$J_{\Gamma_1} > J_{\Gamma_2}$则称可行轨线$\Gamma_1$优于$\Gamma_2$.

很显然, 问题转化为在所有可行轨线中, 找一条最优的轨线Γ^*, 使沿Γ^*的目标函数值最大.

定义 3　由可行轨线Γ_1, Γ_2围成的封闭曲线记为Γ. 封闭曲线Γ的第二型曲线积分可定义为$J_\Gamma = J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}$.

由定义 3 看到, $J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}$为一条封闭曲线上的第二型曲线积分, 这样可以利用 Green 定理把第二型曲线积分化为二重积分. Green 定理叙述如下.

引理[1]　设D是R^2上有界闭域, 其边界∂D是逐段光滑的. 函数$P(x, y)$, $Q(x, y)$以及它的一阶偏导数在闭域D上是连续的, 则有公式

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

其中Γ是闭域D的边界曲线, 而且沿Γ的积分是按正方向取的. 所谓的正方向, 就是指这样的方向, 当人沿此方向前进时, 区域D永远在其左边. 式(4) 称为格林定理.

定理　$N^* = \frac{\alpha}{2r}$是所有可行轨线中的最优轨线.

证　根据 Green 定理, 考虑$(t, N(t))$平面中的曲线积分和二重积分的关系, 得

$$J_\Gamma = \oint_\Gamma[\alpha N(t) - rN^2(t)]\mathrm{d}t - \mathrm{d}N(t) = \iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}(-1) - \frac{\partial}{\partial N(t)}[\alpha N(t) - rN^2(t)]\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}N(t) = \iint_D[0 - \alpha + 2rN(t)]\mathrm{d}t\mathrm{d}N(t).$$

令$I(N(t)) = -\alpha + 2rN(t)$, 当$I(N(t)) = 0$时, 解为$N^* = \frac{\alpha}{2r}$(参见图 2).

不失一般性, 只需考虑可行轨线在N^*下方或上方即可. 任取N^*下方的可行轨线, 不妨设为Γ_1. 当$N(t) < N^*$时, 在由可行轨线Γ_1和N^*围成的曲线Γ和围成的区域D中, 易见$I(N(t)) < 0$, 可知$J_\Gamma < 0$. 由定义 3, $J_\Gamma = J_{\Gamma_1} - J_{N^*} < 0$, 故$J_{\Gamma_1} < J_{N^*}$. 任取$N^*$上方的可行轨线, 不妨设为$\Gamma_2$, 若有$N(t) > N^*$, 在由可行轨线$\Gamma_2$和$N^*$围成的曲线$\Gamma$及围成的区域$D$中, 易见$I(N(t)) > 0$, 可知$J_\Gamma >$

0, 由定义3可得 $J_{\Gamma} = J_{N^*} - J_{\Gamma_2} > 0$, 故 $J_{N^*} > J_{\Gamma_2}$.

故所有的可行轨线中, 沿着 N^* 的目标函数值 J_{N^*} 最大, 即 N^* 为最优轨线. 证毕.

最优捕获策略 $k^* = \dfrac{\alpha N^* - r(N^*)^2}{N^*} = \dfrac{\alpha^2/2r - r\times(\alpha^2/4r^2)}{\alpha/2r} = \dfrac{\alpha}{2}$.

最优策略与最优轨线如图3所示.

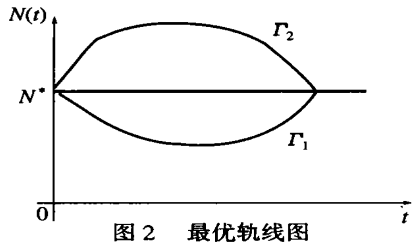

图2 最优轨线图

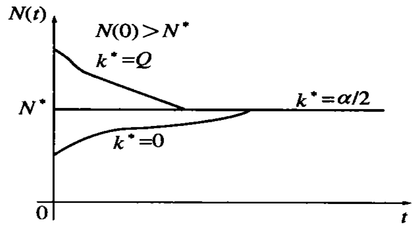

图3 最优策略与最优轨线

2 结论

由图3可见, 如果一开始鱼口数量少, $N(0) < N^*$, 则应该休渔, 等鱼口数量到达时 N^* 再开始捕获, 使鱼口数量总维持在一个固定的水平上, 按 $K^* = \dfrac{\alpha}{2}$ 策略捕鱼. 同样, 如果开始时鱼口数量很多, 则应采取 $K^* = Q$, 即尽最大努力捕鱼(Q 为捕捞的最大可能值), 使鱼口数量降至 N^* 后, 再按 $K^* = \dfrac{\alpha}{2}$ 策略捕获.

在实际的渔业操作后, α和 r 等参数具体可依实际情况求出, 具体捕获量也可以进行计算. 一般地, 也可以简单估算. 比如从状态方程 $\dfrac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - rN^2(t)$ 两边同除以 $N(t)$, 得到鱼口增长率, 即 $\dfrac{dN(t)/dt}{N(t)} = \alpha - rN(t)$. 鱼口数量维持不变时, 鱼口增长率为0, 即 $\alpha - rN(t) = 0$, 得 $N(t) = \dfrac{\alpha}{r}$. 当不捕鱼时, 鱼口数量维持在 $\dfrac{\alpha}{r}$ 的水平上. 最优捕获方案是 $k = \dfrac{\alpha}{2}$, 鱼口数量维持在 $\dfrac{\alpha}{2r}$ 水平上. 比如, 某港湾鱼口数量当不捕时鱼口数量可维持在100亿尾, 那么最优方案就是使鱼口数量维持在50亿尾水平上.

参考文献:

[1] 戴姆 C L, 艾维 E S. 数学构模原理[M]. 北京: 海洋出版社, 1985. 189—192.

[2] William, Lucas. 微分方程模型[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998. 87—95.

[3] 黄玉民, 李成章. 数学分析[M]. 北京: 科学出版社, 1995. 392.

Application of Green Theorem in Optimum Catching Question of Fishery Resources

TAN Yi-lan[1], WANG Xiu-hong[2]

(1. School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. School of Mathematical and Information, Yantai Normal University, Yantai 264025, China)

Abstract: Based on the fish population models in Malthusian theory and Verhulst equation, the relationship between the time and the catching amount is presented. By using Green theorem, the optimum scheme that the maximum amount of fish can be caught at a given time is obtained.

Key word: fish population model; Green theorem; optimum catching

(责任编辑 王美岚)