

挠性卫星姿态低阶鲁棒控制器设计

兰维瑶, 彭 洪, 罗林开, 陈亚陵

(厦门大学自动化系, 福建 厦门, 361005)

摘要: 研究多挠性充液卫星姿态运动的低阶鲁棒控制器设计问题. 综合应用模态截断、 H_{∞} 回路成形和 H_{∞} 平衡截断方法设计低阶鲁棒控制器. 模态截断获得适当阶数的卫星姿态运动模型; H_{∞} 回路成形方法设计鲁棒控制器; H_{∞} 平衡截断技术实现控制器降阶. 满阶对象和低阶控制器组成闭环进行计算机仿真.

关键词: 姿态控制; 控制器降阶; 模态截断; H_{∞} 平衡截断

中图分类号: TP13

文献标识码: A

多挠性充液卫星姿态运动动力学模型非常复杂, 而且阶数非常高. 在工程上, 受计算机运算速度和内存的限制, 控制器的阶数不能太高, 因此要寻找适当的方法设计低阶控制器. 采用 H_{∞} 回路成形方法设计鲁棒控制器得到的控制器的阶数等于受控对象的阶数, 因此为了便于控制器设计, 以及得到较低阶数的控制器, 就需要对受控对象进行简化以得到比较简单的对象模型. 象其它 H_{∞} 控制器设计方法一样, H_{∞} 回路成形方法设计的控制器的阶数也是偏高的, 因此有必要对它进行进一步降阶. 按照惯例, 模型简化通常采用平衡截断技术, 如 Hankel 平衡截断和 LQG 平衡截断, 由于他们都有局限性, 因此本文目的在于应用文献[1]提出的最新的 H_{∞} 平衡截断方法设计挠性卫星姿态运动的低阶鲁棒控制器. 对卫星挠性部件的高阶模态进行适当的截断, 以得到简单的受控模型; 再用 H_{∞} 平衡截断技术对 H_{∞} 控制器进一步降阶, 得到我们最终的低阶鲁棒控制器, 其优势在于闭环系统性能与鲁棒性能同时得到保持.

本文后面各节内容安排如下: 第 1 节介绍模态截断的鲁棒频率准则, 第 2 节简单介绍 H_{∞} 回路成形方法, 第 3 节阐述 H_{∞} 平衡截断方法, 第 4 节应用模态截断、 H_{∞} 回路成形方法和 H_{∞} 平衡截断技术设计低阶鲁棒控制器, 最后总结了应用 H_{∞} 平衡截断技术设计低阶控制器的体会和结果.

1 模态截断—鲁棒频率准则

卫星挠性附件的高阶模态的频率远离执行器与传感器的工作频带, 不易激励, 即使受到激励, 由于高阶模态的阻尼较大, 从而较快受到衰减, 因此, 在高阶系统模型中, 对挠性体的高阶模态作截断处理, 使模型得到简化. 从精确度方面来说, 简化模型应该尽可能地近似于原来的模型, 而从控制器设计的角度考虑, 又力求模型简单, 因此合理的模态截

收稿日期: 2001-04-28

基金项目: 中国空间技术研究院预研课题和教育部重点 211 工程项目

断需要一定的准则依据. 在本文中, 我们采用文献[2]的方法, 应用鲁棒频率准则作为模态截断的依据.

假设 $\tilde{G}(s)$ 是模型简化前的对象传递函数矩阵, $G(s)$ 为它的简化模型, $G(s)$ 是通过截去高阶模态后得到的. 记模型误差为 $\Delta := \tilde{G} - G$, 如图 1 所示, 根据[3], 可以证明, 如果对所有的频率 ω , 有

$$\frac{\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))}{\underline{\sigma}(G(j\omega))} \cdot \bar{\sigma}(GK(I + GK)^{-1}(j\omega)) < 1 \quad (1)$$

则 K 稳定对象 \tilde{G} .

定义 1 (鲁棒频率):

$$\omega_r := \max\{\omega \mid \underline{\sigma}(G(j\omega)) \geq \bar{\sigma}(\Delta(j\omega))\} \quad (2)$$

称 ω_r 为鲁棒频率, 其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 和 $\underline{\sigma}(\cdot)$ 分别为最大奇异值和最小奇异值, 以图 2 表示.

根据图 2, 还可以定义控制系统的带宽.

定义 2 (系统带宽):

$$\omega_B := \max\{\omega \mid \bar{\sigma}((I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}) \ll 1\}$$

不严格的描述为: 控制系统的带宽 ω_B 是指这样的频率区域, 其回路传递函数的奇异值是大的, 即

$$\bar{\sigma}(GK) \gg 1 \quad \text{对所有的 } \omega < \omega_B \quad (3)$$

根据以上的规定和描述, 我们知道, 对于 $\omega \leq \omega_B$, 如果方程 (3) 满足, 则有

$$\bar{\sigma}(GK(I + GK)^{-1}) = 1$$

所以, 方程 (1) 近似地化为

$$\bar{\sigma}(\Delta) < \underline{\sigma}(G)$$

因此我们有下面用于模态截断的鲁棒频率准则.

鲁棒频率准则: 对于 $\omega \leq \omega_r$, 如果 $\bar{\sigma}(\Delta) < \underline{\sigma}(G)$ (此时 Δ 和 G 均为开环稳定), 只要 $\omega_r > \omega_B$, 则闭回路是稳定的 (即鲁棒稳定).

鲁棒频率准则仅是充分条件. 它的含义是指, 为达到对某系统设计所要求的带宽 ω_B , 应用其鲁棒频率 $\omega_r > \omega_B$ 的任何简化模型是足够的. 这就是如何运用通过 $\omega_r > \omega_B$ 的鲁棒频率准则来判断所作的模型简化 (这里指模态截断降阶) 是否有效的一种方法.

2 H_∞ 回路成形方法简介

本节简单介绍 H_∞ 回路成形方法设计鲁棒控制器, 它的详细内容请参考文献[3~5]. H_∞ 回路成形方法包括两方面的内容, 即鲁棒镇定和回路成形, 鲁棒镇定解决控制系统的鲁棒稳定性问题, 而回路成形处理控制系统的性能指标.

让 G_0 为受控标称对象的传递矩阵, G_0 的左互素因子分解为

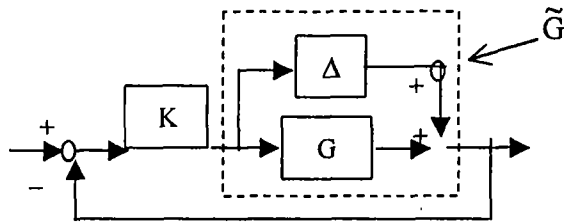


图 1 模型的简化
Fig.1 Simplification of the model

$$G_0 = \tilde{M}_0^{-1} \tilde{N}_0 \tag{4}$$

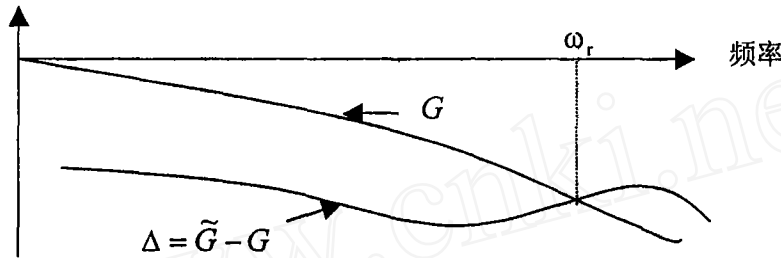


图2 鲁棒频率

Fig.2 Robust frequency

其中 $(\tilde{M}_0, \tilde{N}_0)$ 为稳定和真的传递矩阵, 满足

$$\tilde{M}_0 \tilde{M}_0^* + \tilde{N}_0 \tilde{N}_0^* = I \tag{5}$$

考虑对每个互素因子的加法摄动, 那么一族摄动对象能够定义为

$$G_\varepsilon = \left\{ G_\Delta = (\tilde{M}_0 + \Delta_M)^{-1} (\tilde{N}_0 + \Delta_N) : \|(\Delta_M, \Delta_N)\|_\infty < \varepsilon \right\} \tag{6}$$

鲁棒镇定问题是寻找唯一确定的控制器 K 稳定集合 G_ε 中的所有对象, 也就是说, 要求寻找最大正数 ε_{max} 使得 $G_{\varepsilon_{max}}$ 是鲁棒稳定的 (参见图 3). 可以证明这个鲁棒镇定问题是下面的 H_∞ 控制问题[3],

$$\inf_{K \text{ stabilizing}} \left\| \begin{array}{cc} K(I + G_0 K)^{-1} P_0 & K(I + G_0 K)^{-1} \\ (I + G_0 K)^{-1} P_0 & (I + G_0 K)^{-1} \end{array} \right\|_\infty = \varepsilon_{max}^{-1} \tag{7}$$

而且 ε_{max} 可以预先计算出来,

$$\varepsilon_{max} = \sqrt{I - \|\tilde{N}_0 \quad \tilde{M}_0\|_H^2} \tag{8}$$

其中 $\|\cdot\|_H$ 表示 Hankel 范数.

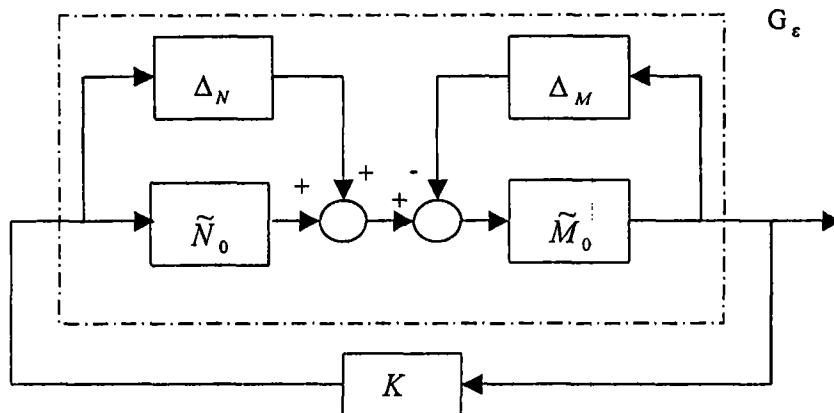


图3 鲁棒镇定问题

Fig.3 Robust stability problem

上面所述的互素因子鲁棒镇定问题没有考虑闭环系统的性能指标. 因此, 在这种方法中引入回路成形技术. 引入前置和后置补偿器 W_1 和 W_2 成形标称对象 G_0 , 受控对象为

$$G_s = W_2 G_0 W_1 \quad (9)$$

则 H_∞ 鲁棒镇定问题为求解

$$\inf_{K \text{ stabilizing}} \left\| \begin{bmatrix} K(I+G_s K)^{-1} P_s & K(I+G_s K)^{-1} \\ (I+G_s K)^{-1} P_s & (I+G_s K)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \varepsilon_{\max}^{-1} \quad (10)$$

因为 W_1 和 W_2 的选择是在计算 H_∞ 控制器之前, 成形目标是标称对象 G_0 , 所以这种方法被称为开回路成形方法. 对成形以后的对象 G_s 求解互素因子鲁棒镇定问题, 得到鲁棒控制器 K , 则其最终鲁棒控制器为 $K_s = W_1 K W_2$.

3 H_∞ 平衡截断

为了描述 H_∞ 平衡截断, 我们首先给出下面的定义.

定义 3 (H_∞ 特征值): 让 $G = (A, B, C)$ 为 n 状态最小实现, $\gamma > \gamma_0$, X_∞ 和 Y_∞ 分别为下面 H_∞ 控制代数 Riccati 方程 (HCARE) 和 H_∞ 滤波代数 Riccati 方程 (HFARE) 的唯一正定稳定化解,

$$A^T X_\infty + X_\infty A - (1 - \gamma^{-2}) X_\infty B B^T X_\infty + C^T C = 0 \quad (\text{HCARE}) \quad (11)$$

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - (1 - \gamma^{-2}) Y_\infty C^T C Y_\infty + B B^T = 0 \quad (\text{HFARE}) \quad (12)$$

则 H_∞ 特征值定义为 $v_i = \lambda^{\frac{1}{2}}(X_\infty Y_\infty)$, 其中 $\lambda(M)$ 表示 M 的特征值, $\gamma_0 = \varepsilon_{\max}^{-1}$.

定义 4 (H_∞ 平衡实现): 存在相似变换 $G = (A, B, C) \xrightarrow{S} \bar{G} = (SAS^{-1}, SB, CS)$, 使得 HCARE 和 HFARE 的解满足 $X_\infty = Y_\infty = N = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, 其中 v_i 为 H_∞ 特征值且满足 $\gamma > v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n > 0$, 则我们称 \bar{G} 为 G 的 H_∞ 平衡实现.

H_∞ 平衡截断方法是基于这样一种思想方法, 即小的 H_∞ 特征值对应的状态在 H_∞ 意义下是易于滤波和控制的, 因此能够将他们略去, 以得到降阶模型和降阶控制器. 其降阶方法如下所述.

让 $\gamma > \gamma_0$, $G = (A, B, C)$ 为 n 状态 H_∞ 平衡实现, $K = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 是 G 的 H_∞ 控制器. 为了降阶, 选择 $q < n$, 并且分割矩阵 N 为

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad C_s = [C_{11} \quad C_{12}]$$

则得到 q 状态的降阶对象 $G_q = (A_{11}, B_{11}, C_{11})$. 在此基础上, 与 N 一致地分割 \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} 为:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2]$$

则 q 状态的控制器为 $K_q = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$.

H_∞ 平衡截断中, 我们需要考虑的一个问题是, 在保证低阶控制器稳定满阶对象的前提下, 多小的 H_∞ 特征值能够被截断? 对于这个问题我们有如下结论.

H_∞ 平衡截断准则: 让 $\hat{\varepsilon} \leq 2 \sum_{i=q+1}^n v_i = 2 \text{trace}[N_2]$, $\hat{\gamma} = \|\Psi(G_q, K_q)\|_\infty$, $\gamma > \hat{\gamma}$,

$\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$, 则低阶控制器 K_q 和满阶对象组成的闭回路稳定的充分条件是 $\hat{\varepsilon}(\beta + \hat{\gamma}) < 1$. 其中

$$\Psi(G, K) = \begin{bmatrix} (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1}GK \\ K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

H_∞ 平衡截断准则的证明请参阅文献[1].

在实际应用中我们通常取 $\hat{\varepsilon}(\beta + \hat{\gamma}) < 1$ 中各参数的上界值进行计算, 也就是说我们进行

H_∞ 平衡截断时确定阶数的判据通常为 $\varepsilon(\beta + \gamma) < 1$, 其中 $\varepsilon = 2 \sum_{i=q+1}^n v_i = 2 \text{trace}[N_2]$.

4 低阶鲁棒控制器设计

H_∞ 路成形方法设计挠性充液卫星姿态运动鲁棒低阶控制器的设计步骤可以归纳为:

- 1) 卫星姿态运动动力学建模, 得到动力学方程 G ;
- 2) 对动力学方程 G 进行模态截断, 得到简化的卫星姿态运动方程 G_0 ;
- 3) 选择开环系统前置补偿器 W_1 和后置补偿器 W_2 , 得到成形对象 $G_s = W_2 G_0 W_1$;
- 4) 指定 $\gamma > \gamma_0$, 计算 G_s 的 H_∞ 平衡实现 $\bar{G}_s = (A, B, C, D)$, 使 H_∞ 特征值按降序排列, $\gamma > v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n > 0$, 即 $N := \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n) = X_\infty = Y_\infty$ 是 \bar{G}_s 和 γ 的 HCARE 和 HFARE 的稳定化解;
- 5) 采用 H_∞ 开回路成形方法对 \bar{G}_s 设计挠性卫星姿态运动的满阶鲁棒控制器 $\bar{K}_s = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$;
- 6) 根据 $\varepsilon(\beta + \gamma) < 1$, 计算低阶控制器的阶数 k , 将 N 分块为

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \text{其中} \begin{cases} N_1 = \text{diag}(v_1, \dots, v_k) \\ N_2 = \text{diag}(v_{k+1}, \dots, v_n) \end{cases}$$

相应地将满阶控制器 \bar{K}_s 分块为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2]$$

则低阶回路成形控制器为 $\bar{K}_r = (\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$;

- 7) 最终的鲁棒低阶控制器为 $K = W_1 \bar{K}_r W_2$.

我们通过上述设计步骤设计了卫星姿态运动的 H_∞ 低阶鲁棒控制器. 设计对象结果模态截断后只保留了挠性振动的一阶模态, 其余模态在控制器设计时都不予考虑. G_0 为 10 阶对象, G_s 为 12 阶, 因此控制器 \bar{K}_s 为 12 阶, 经过 H_∞ 平衡截断后 \bar{K}_r 为 8 阶, 最终控制器 K 为 10 阶. 经过计算机仿真, 我们发现低阶控制器和满阶控制器的性能几乎没有差别. 图 4 为应用满阶控制器的回路传递函数 GK_F 和应用低阶控制器的回路传递函数

GK 的奇异值图比较, 可以发现, 他们几乎是重叠的, 因此我们知道, 他们的闭环性能是非常接近的; 低阶控制器的仿真结果如图 5—图 7 所示, 它们分别为姿态机动、一阶模态振动和液体晃动的仿真结果. 仿真结果表明 H_{∞} 平衡截断方法设计的低阶鲁棒控制器是成功的和有效的.

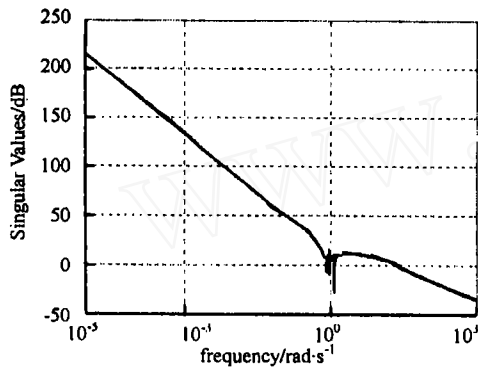


图 4 闭环奇异值图比较

Fig.4 The comparison of closed loop

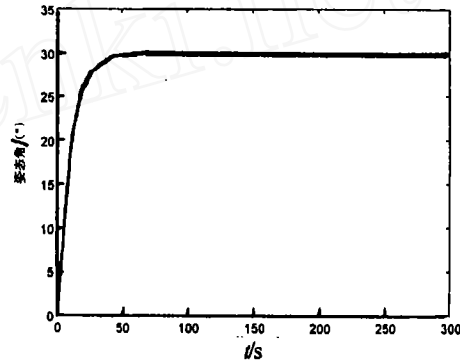


图 5 仿真结果—卫星姿态角

Fig.5 Simulation result-attitude angle

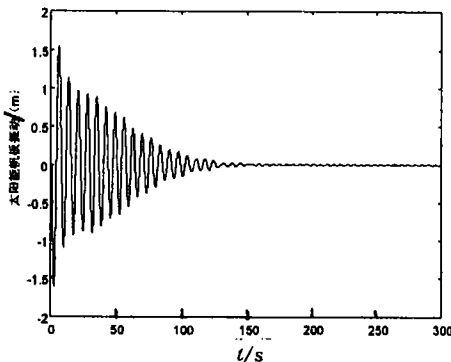


图 6 仿真结果—太阳能帆板振动

Fig.6 Simulation result-vibration

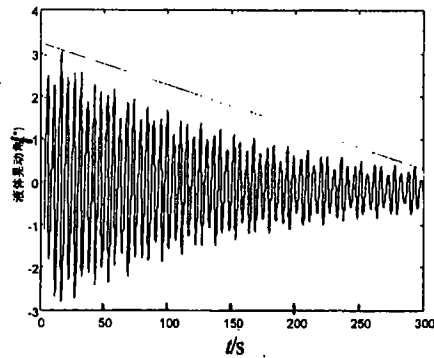


图 7 仿真结果—液体晃动角

Fig.7 Simulation result-liquidway angle

5 结束语

本文探讨了卫星姿态运动的低阶鲁棒控制器设计问题. 采用的主要降阶方法是模态截断和 H_{∞} 平衡截断, 模态截断用以获得低阶控制对象, H_{∞} 平衡截断用于降阶 H_{∞} 控制器, 两者相结合得到一个比较满意的低阶控制器. 模态截断的精度通过鲁棒频率准则来确定, H_{∞} 平衡截断中对于 H_{∞} 特征值的取舍是通过 H_{∞} 平衡截断准则来判断的. 通过这两个判据, 可以很容易地确定模型必须保留的阶数. 必须指出的是, H_{∞} 平衡截断准则是一个充分条件, 而且在应用时我们采用的判别条件是 $\varepsilon(\beta + \gamma) < 1$, 因此 H_{∞} 平衡截断方法得到的控制器在阶数保留方面是比较保守的, 也就是说, H_{∞} 平衡截断得到的低阶控制器不一定是满足设计要求的最低阶控制器, 因为最低阶控制器的设计目前仍然是一个开问题. 然而, H_{∞} 平衡截断方法能够预先计算低阶控制器的阶数, 为我们快速确定低阶控制器是非

常有利和方便的。

计算机仿真结果表明, 模态截断加 H_∞ 平衡截断方法在设计卫星姿态运动低阶鲁棒控制器上的应用是成功的、有效的。鲁棒频率准则和 H_∞ 平衡截断准则为模型降阶提供的必要的依据。

参考文献:

- [1] Mustafa D, Glover, K. Controller reduction by H_∞ -balanced truncation, IEEE trans[J]. Auto. Contr., 1991, 36(6):668-689.
- [2] Safonov M G, Chiang R Y, Flashner H. H_∞ robust control synthesis for a large space structure[J]. J. Guidance, 1991, 14(3):513-520.
- [3] 陈亚陵, 兰维瑶. 带多挠性附件的充液卫星姿态鲁棒控制系统计算机辅助设计与仿真, 研究报告(三) [R]. 厦门大学自动化系, 1999年8月.
- [4] MacFarlane D, Glover K. Robust controller design using normalized coprime factor descriptions[M]. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 138, Springer-Verlag, Berlin:1990.
- [5] 陈亚陵, 兰维瑶. 带多挠性附件的充液卫星姿态鲁棒控制器设计方法, 研究报告(二) [R]. 厦门大学自动化系, 1999年3月.

Reduced-order Robust Controller Design of Flexible Satellite Attitude

LAN Wei-yao, PENG Hong, LUO Lin-kai, CHEN Yal-ing
(Dept of Automation, Xiamen Univ., Xiamen, 361005, China)

Abstract: This paper studies the reduced-order robust controller design of flexible satellite attitude. Mode truncation, H_∞ loop-shaping and H_∞ balanced truncation are being used during the controller designing. The model of satellite attitude movement is simplified by mode truncation, an robust controller is designed by H_∞ loop-shaping, and then, the robust controller is reduced by H_∞ balanced truncation. The closed-loop system, consisted by the reduced-order robust controller and the full-order plant, is simulated by computer.

Key words: mode truncation; attitude control; controller reduction; H_∞ balanced truncation