第 39卷 第 6期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 6
2000年 11月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Nov. 2000

° 研究简报° 文章编号: 0438-0479(2000)06-0873-04

基于粗集理论的逻辑函数简化方法

康胜武,龙 丽,王应明
(厦门大学自动化系,福建 厦门 361005)

摘要: 针对数字电路中逻辑函数真值表的特殊形式,利用粗集理论把它处理为一种决策表,用决策表的最小决策算法对其进行化简,然后从真值表中直接归纳出最简的逻辑表达式.此方法简单、快速,特别适用于数字电路中从已知真值表求出相应的逻辑表达式及其对应的逻辑电路,为粗集理论在数字电路中的应用提供有力工具.

关键词: 粗集理论;逻辑函数;卡诺图
中图分类号: TP 391 文献标识码: A

近年来,粗集理论在智能信息处理研究领域迅速发展,该理论研究了精确知识的表达学习、归纳等方法.它的一个重要特点是具有很强的定性分析能力,即不需要预先给定某些特征或属性的数量描述和统计学中的概率分布,模糊集中的隶属度,而是直接从给定问题的描述集合出发,通过不可分辨关系和不可分辨类确定给定问题的规律.

本文基于粗集理论的概念,把知识表达系统中决策表的简化应用到数字电路中的真值表的化简,提出与卡诺图等效的方法.

1 Rough sets理论

1.1 基本概念

给定的一个对象论域 U,对于任何子集 $X\in U$称为一个 U中的概念或范畴,它构成了特定的分类.通常用等价关系代替分类.

当 R为 U上的等价关系,则 U/R为 R所有等价类族, $[X]_R$ 表示子集 X属于 R中的一个范畴,且 R包含元素 $X\in U$.

若 $P\subset R$, $P\neq\varnothing$,则$\cap R$也是一等价关系,称为 P上的不可分辨关系,记为

$$\mathrm{ind}(P):\ [X]_{\mathrm{ind}(p)}=\bigcap_{r\in p}[X]_r$$

收稿日期: 1999-12-27
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(A0010002);高等学校青年骨干教师基金资助计划(教计师(2000)65)
作者简介: 康胜武(1973-),男,硕士生.

其中, $[X]_r$: $X\in U$且 X属于 r中的一个范畴, $[X]_{ind(P)}$: X属于不可分辨关系 ind(P)中的一个范畴, des($[X]$)表示 U上对象 X在等价关系 r上等价类的描述.

粗集可以近似地定义,用粗集的上近似集和下近似集来描述.

$$R_-(X)=\bigcup\{Y\in U/R: Y\subseteq X\}$$

$$R^-(X)=\bigcup\{Y\in U/R: Y\cap X\neq\varnothing\}$$

即当且仅当 $[X]_R\subseteq X$, $X\in R_-(X)$;当且仅当 $[X]_R\cap X\neq\varnothing$, $X\in R^-(X)$,集合 $bn_R(X)=R^-(X)-R_-(X)$称为 X的 R边界,把 $pos_R(X)=R_-(X)$称为 X的 R正域,把 $neg_R(X)=U-R_-(X)$称为 X的 R负域,把 $bn_R(X)$称为 X的边界域.

1.2 知识的简化

在保持知识库中的初等范畴的情况下消除知识库中的冗余分类或冗余基本范畴,涉及到知识化简.令 R为一等价关系族且 $r\in R$,当 ind(R) = ind($R-\{r\}$),称 r为 R中可省略的,否则 r为 R中不可省略的.

在应用中,一个分类相对另一个分类的关系十分重要.我们定义一个分类相对另一个分类的正域,令 P和 Q为 U中的等价关系, Q的 P正域,记为 $Pos_P(Q)=\bigcup_{X\in U/Q}P_-(X)$.当 $Pos_{ind(P)}(ind(Q))=Pos_{ind(P-\{r\})}(ind(Q))$时,称 $r\in P$为 P中可省略的,否则 r为 P中 Q不可省略的. P中所有不可省略关系称为 P的 Q核,记为 $core_Q(P)$. P中所有 Q简化族记为 $red_Q(P)$,有 $core_Q(P)=\bigcap red_Q(P)$,若 S为 P为 Q的独立子族,且 $pos_S(Q)=pos_P(Q)$,则 $S\subset P$称为 P的 Q简化.

1.3 知识表达系统

为了处理智能数据,我们需要知识的符合表达.

一个知识表达系统 S可以表达为 $S=\langle U,C,D,V,f\rangle$.这里 U是对象的集合, $C\cup D=A$是属性集合,子集 C和 D分别称为条件属性和决策属性, $V=\bigcup_{a\in A}V_a$是属性值的集合. V_a表示 $a\in A$的范围, $f: \bigcup_x A\rightarrow V$是一个信息函数,它指定 U中的每一个对象 X的属性值,选取属性个数最少且在这个条件下等价类个数最少的简化作为 C的 D最小简化,记为 $mred_D(C)$,知识表达系统的定义可以方便地用表格表达实现,在决策表中,列表示属性,行表示对象.一个属性对应一个等价关系,一个表可以看作是定义的一族等价关系,即知识库.

1.4 决策表的简化

决策表的简化就是化简决策表的条件属性,化简后的决策表具有化简前的决策表的功能,但是化简后的决策表具有更少的条件属性.

令 $\tilde{C}=mred_D(C)$, $S=\langle U,C,D,V,f\rangle$ $(V=\bigcup V_a, f: \bigcup_{a\in\tilde{C}\cup D}\times A\rightarrow V)$

$\forall x\in U$,用 d_x表示决策规则:

$$d_x: des([x]_C)\Rightarrow des([x]_D), d_x(a)=ax, a\in C\cup D$$

且 $d_x|C$, $d_x|D$分别称为 d_x的条件和决策.

引入 d_x核值属性的概念:对于 S,决策规则 d_x有 $[x]_C\subseteq[x]_D$,若 $\forall r\in C$,有 $[x]_{C-\{r\}}\not\subset[x]_D$,则 r为 d_x的核值属性, r为 d_x中的不可省略的;若 $[x]_{C-\{r\}}\subseteq[x]_D$,则 r为 d_x中的可省略的,不为 d_x的核值属性,求得每个 d_x的核值属性,然后形成决策表的条件属性和核值表[1].

令 $U/D = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 表示 U 上的对象集合的决策类集,对每一个决策表等价类定义决策规则类 DRC(Decision Rule Class) 为

$$DRC(y) = \{d_x: \mathrm{des}([X]_C) \Rightarrow \mathrm{des}([x]_D) \mid x \in D, [x]_C \subseteq y\}, \forall y \in U/D$$

下面引用决策表 y 的最小决策算法步骤[2].

1) 任取 $d_x \in DR(y)$;

2) 如果 $[x]_{core(d_x)} \subseteq y$,输出决策规则;

$d_x: \mathrm{des}([x]_{core(d_x)}) \Rightarrow \mathrm{des}([x]_D)$,$DRC(y) = DR(y) - [x]_{cord(d_x)}$ 转 9);

3) 令 $A = C - \mathrm{core}(d_x)$,根据 $w(a) = |pos_{\{a\} \in A}(D)| / |U|$ 对 A 中元素排序,得有序集 OA,且 $|OA| = m$,OA 的 m 个有序幂子集分别为 $T_1(OA), T_2(OA), \cdots, T_m(OA)$,相应的元素个数为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$;

4) $j = 0$,

5) $i = 0$,

6) 令 $B = \mathrm{core}(d_x) \cup T_j^i(OA)$,如果 $[x]_B \subseteq y$,输出

$d_x: \mathrm{des}([x]_B) \Rightarrow \mathrm{des}([x]_D)$, $DRC(y) = DRC(y) - [x]_B$,转 9);

7) $I = I + 1$.如果 $I < n$,转 6),

8) $j = j + 1$,如果 $j \leq m$,转 5),

9) 如果 $DRC(y) \neq \varnothing$ 转 1),

10) 结束.

根据数字电路中真值表的特点,若有 n 个变量,则有 2^n 个独立的组合状态,所以 n 个变量(即条件属性)都是不可省略的,且条件属性和决策属性都只有两个等价类(0类和 1类),把条件属性用 A, B, C, D 等字母依次表示,在最后得到的属性核值表中,用属性原值表示为“1”,属性值的非表示为“0”.根据逻辑电路理论,把决策属性为 1类的决策规则相加就得到最简逻辑表达式.

2 逻辑函数和卡诺图

数字电路是一种开关电路,开关的两种状态“开通”和“关断”,用二元常量 0和 1来表示,数字电路的输出量与输入量之间的关系一种因果关系.可以用逻辑表达式来描述,因而数字电路又称逻辑电路.逻辑数研究逻辑电路的数学工具,所研究的内容是逻辑函数与逻辑变量之间关系,根据某种逻辑要求而归纳出的逻辑表达式及其对应的逻辑电路,往往不是最简的形式,这就需要对逻辑表达式进行化简.化简逻辑电路的方法,常用的有代数法和著名的卡诺图法.具体的步骤,请参阅有关的数字电路方法的专业书籍[3].

3 结论与讨论

目前数字电路中的逻辑函数化简方法主要是代数法和卡诺图法,代数法要经过复杂的公式推导,应用很多特性且容易出错,较为有效的方法是卡诺图法,但是它首先需要从真值表转化为卡诺图,然后对卡诺图进行操作,而粗集方法可直接由真值表根据逻辑电路理论推导得出最简的逻辑表达式,省去了中间的转化过程,而且可以验证卡诺图方法的正确性.在数字电路中大量存在的真值表与粗集理论中的决策表在形式上是一致的,所以粗集中决策表的最小决

策算法适合真值表的化简,特别是数字电路中已知真值表来分析和设计组合逻辑电路,更能发挥粗集在规则提取方面的作用.

参考文献:

[1] 曾黄麟.粗集理论及其应用[M].重庆:重庆大学出版社,1996.

[2] 吴福保,李奇,宋文忠.基于粗集理论表达系统的一种归纳学习方法[J].控制与决策,1999,14(3):209-210.

[3] 康华光.电子技术基础[M].北京:高等教育出版社,1988.

[4] Pawlak Z. Rough sets[J]. Communication of the ACM, 1995, 38(11): 89-95.

[5] Swong. Comparison of rough sets and statistical methods in inductive learning[J]. Int. J Man-Machine Studies, 1986, 23: 53-72.

Simplifying Method of Logic Function Based on Rough Sets

KANG Sheng-wu, LONG Li, WANG Ying-ming

(Dept. of Auto., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract Due to its special form in the digit circuit, the logic function true value table is treated to the decision-making table through the rough set theory and simplified by using the least decision-making algorithm, so one can directly conclude the most simplified logic expression from the true value table. This method is both simple and speedy, and fit for making out the logic expression and logic circuit from the true value table. It provides the powerful tool for the rough sets application in the digit circuit.

Key words rough Sets; logical function; Karnaugh's diagram method