

# 对决策单元进行排序的一种方法

李果, 沈晓勇, 王应明

(厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 传统 DEA 模型只能评价决策单元的相对有效性, 将决策单元分为有效和非有效的两类, 而不能对决策单元进行排序。本文提出一种新的对决策单元进行排序的 DEA 方法, 该方法通过在 DEA 模型中引入理想 DMU 来得到一组公共权重, 并以此为基准排序。

**关键词:** 数据包络分析 (DEA); 公共权重; 效率评价指数

**中图分类号:** C934      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1003-5192(2000)04-0051-03

## A New Method for Ranking DMUs

LI Guo, SHEN Xiao-yong, WANG Ying-ming (Xiamen University, Xiamen 361005 China)

**Abstract** Traditional DEA models can only evaluate the relative efficiency of DMUs but can not rank all the DMUs. In this article a new method for ranking DMUs is proposed. The method utilizes an ideal DMU to determine the common weights so as to rank all the DMUs.

**Key words** data envelopment analysis; common weight; efficiency evaluation

### 1 引言

数据包络分析 (DEA) 方法是研究多输入多输出决策单元 (DMU) 间相对有效性的有用方法。但是 DEA 方法存在一个缺陷, 由于各个决策单元是从最有利于自己的角度分别求权重的, 导致这些权重是随 DMU 的不同而不同的, 从而使得每个决策单元的特性缺乏可比性。所以 DEA 方法只能判断决策单元是否是 DEA 有效的, 将它们分为有效和非有效两大类。另外, 用这种方法进行评价时容易出现大量的, 甚至全部决策单元都为有效的情形, 这都是由于传统的 DEA 方法总是强调单个被评价单元的优势所致。因此, 传统的 DEA 方法不能对决策单元进行排序, 从而进行更进一步的分析评价。

在实际生产活动中, 对决策单元按一定的标准排序也是进行分析评价时很重要的一个方面。现在已有不少关于对决策单元进行排序的 DEA 方法的研究, 尤其是对 DEA 有效的决策单元进行排序的研究。现有的研究多是将 DEA 方法与其它方法结合起来, 如在文献 [1] 中提出了一种对决策单元进行排序的 DR/DEA 方法。该方法综合了 DEA 方法和判别分析方法, 它在基于 DEA 评价的基础上通过用判别分析将

各 DMU 判属有效或非有效的两类从而得到一组相应于所有 DMUs 的权重, 进而进行排序。还有用主成分分析方法对 DEA 有效的决策单元进行再排序<sup>[2,3]</sup>, 以及使 DEA 方法与 OERA (Offensive Earned-Run Average) 方法相结合进行棒球评估和排序, 等等<sup>[4]</sup>。

在本文中, 提出了一种新的决策单元排序的 DEA 方法。该方法同传统 DEA 方法相似, 用决策单元的相对有效性来作为排序的依据。它是从 DEA 方法权重确定的思想扩展得到的。所不同的是传统 DEA 模型测算出的相对效率的权重对每个决策单元都是不同的, 而新方法给出了一组比较合理的公共权重, 并在统一的权重基础上计算相对效率指数, 从而对决策单元进行排序。该方法的思路是: 引入一个输入最小输出最大的理想 DMU, 这个理想 DMU 无疑相对于其它 DMU 来说是 DEA 有效的, 对它的效率指数求最大所测算出的权重就是一组相对比较合理的权重, 在这组公共权重的基础上求得的所有 DMUs 的相对效率指数就可以用来进行排序。

### 2 引入理想 DMU 对决策单元进行排序

用传统的 DEA 方法计算相对效率, 得到的各个指标的权重对每个决策单元都是不同的。而我们想要

收稿日期: 2000-01-01

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目 (79600020)

得到所有 DMUs 的公共权重,这就需要在统一的标准下对每个决策单元进行评价。为此,我们引入一个理想的 DMU,在对这个理想的 DMU 求最大效率的同时得到所有 DMUs 的一组公共权重,利用这组权重可以对 DMUs 进行排序。

设有  $n$  个决策单元,输入指标数为  $m$ ,输出指标数为  $s$  则整个生产活动的输入输出矩阵分别为:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{bmatrix}_{s \times n}$$

设对于每个输入指标  $k (1 \leq k \leq m)$ ,所有 DMUs 的输入的最小值为  $x_{\min k}$  这些最小输入构成了该生产活动的最小输入向量,记为:

$$x_{\min} = (x_{\min 1}, x_{\min 2}, \cdots, x_{\min m})$$

同理,取所有 DMUs 的输出的最大值可得最大输出向量为:  $y_{\max} = (y_{\max 1}, y_{\max 2}, \cdots, y_{\max s})$

则称  $(x_{\min}, y_{\max})$  为理想决策单元所对应的生产活动。

对理想决策单元来说,它的输入为所有 DMUs 在每个输入指标的最小值,它的输出为所有输出指标的最大值。

这个理想 DMU 因为是取了所有 DMUs 的最小输入以及最大输出得到的,所以是一个理想状态,有可能并不存在于生产可能集内部。但是 DEA 有效是一个相对概念,我们引入理想 DMU 只是作为一个参照,为了得到对所有 DMUs 都合理的公共权重,从而对 DMUs 进行排序。

称  $h^j = (u^T y_{\max}) / (v^T x_{\min})$  为理想 DMU 的效率评价指数。

现在将理想 DMU 加入生产可能集中,即扩大原生产可能集。然后应用 DEA 方法确定权重的思想构造如下的 DEA 模型:

$$\begin{cases} \max \frac{u^T y_{\max}}{v^T x_{\min}} \\ \text{s. t. } \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1, \quad j = 1, \cdots, n \\ \frac{u^T y_{\max}}{v^T x_{\min}} \leq 1 \\ u_k \geq 0 \quad k = 1, \cdots, s \\ v_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

这个 DEA 模型是以理想 DMU 的效率最大为目的来确定权重以及求解相对有效性的。

因为理想 DMU 是一种最优的理想情形,所以在这个 DEA 模型中,理想 DMU 必定是最有效的,它的效率评价指数必为 1 所以这个模型也可以理解为是使理想 DMU 达到 DEA 有效而构造的。因此,它所求得的关于权重的最优解也是使理想 DMU 达到有效意义下确定的,而理想 DMU 相对于其它 DMUs 确实是有效的,所以在这个意义下计算出的权重对于所有的 DMUs 来说都是合理适用的,从而避免了传统 DEA 模型强调每个 DMU 所计算出的权重片面没有普适性的缺点。

设线性规划 (IP) 的最优解为  $u^*, v^*$ , 则称  $u^*, v^*$  为所有 DMUs 的排序公共权重。

称  $h_j^* = (u^{*T} y_j) / (v^{*T} x_j)$  为 DMU<sub>j</sub> 的排序效率指数。

根据每个决策单元的排序效率指数,就可以对决策单元进行排序。

### 3 实例分析

下面通过两个数据实例来说明这种排序方法的有效性。

考虑这样一个问题:有 4 个决策单元,6 个输入指标和 4 个输出指标。相应的输入和输出数据由表 1 给出。

表 1 输入、输出数据表

	输出 (4 个)				输入 (6 个)					
DMU <sub>1</sub>	500	40	2	28	850	310	50	660	2.2	11
DMU <sub>2</sub>	500	40	2	28	1000	310	50	660	2.2	11
DMU <sub>3</sub>	700	50	4	40	1500	450	100	1300	5.0	10
DMU <sub>4</sub>	700	50	2	40	1000	310	50	660	2.2	11

表 2 各决策单元的排序效率指数及排序结果

	h1	h2	h3	h4	理想 DMU
效率指数	0.7151	0.6529	0.5530	0.9125	1.0000
排序结果	2	3	4	1	

首先用 DEA传统模型  $C^2R$  模型进行评价。可得 4 个决策单元的有效值都为 1, 即 4 个决策单元都是 DEA 有效的。但是我们直观可以看出, 明显地  $DMU_1$  优于  $DMU_2$  (输出相同输入不同);  $DMU_4$  优于  $DMU_2$  (输入相同输出不同)。但是, 传统 DEA 模型却将它们全部计算为 DEA 有效, 说明传统 DEA 模型在评价时存在缺陷, 常存在过多的有效决策单元, 不同  $DMU$  之间缺乏可比性, 无法对  $DMUs$  进行统一排序。

应用本文中的方法, 计算各决策单元的排序效率指数及排序结果, 如表 2 所示。

从表 2 中的结果可以看出, 用模型 (IP) 算得的结果与实际情况是较为一致的。决策单元排序顺序为:  $DMU_4 > DMU_1 > DMU_2 > DMU_3$ , 且理想  $DMU$  的效率指数等于 1 而用传统 DEA 模型则只能得到所有  $DMUs$  都为 DEA 有效的结果。所以引入理想  $DMU$  进行排序能得到较好的排序评价结果。

为了便于与其它排序方法比较, 本文又取文献 [4] 中的数据集进行计算比较。

文献 [4] 中用 OERA 方法和 DEA/OERA 方法对 30 个棒球队员的表现进行评价, 以得到他们表现的排序得分。用本文中提出的新的排序方法对这 30 个队员的表现进行评价, 所得的排序效率指数见表 3, 其中括号内的数字为排序结果。

下面用图示方法更清楚直观地比较几种方法的结果。为了简单起见, 将几种方法的结果都标准化为

[0, 1] 区间上的数。图 1 中, 曲线 1 是由传统 DEA 方法得到的; 曲线 2 由本文提出的排序方法得到; 曲线 3 是文献 [4] 中的 OERA 方法的结果; 曲线 4 是文献 [4] 中 DEA/OERA 方法得到的。

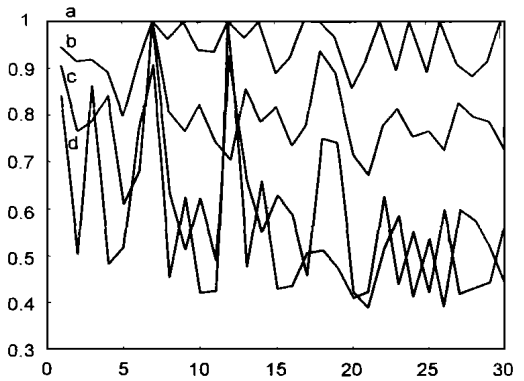


图 1 几种排序方法结果比较

从图 1 中可以看出, 几种排序方法结果相近。比起传统 DEA 方法得到多个 DEA 有效的决策单元的结果来, 几种排序方法都能给出比较合理的结果。可以注意到本文的排序结果与传统 DEA 方法得到的结果的趋势更为接近。这个实例也说明本文提出的引入理想  $DMU$  对决策单元进行排序的方法是一种合理有效的方法。

表 3 30 个棒球队员的排序效率指数和排序结果

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4861 (2)	0.4703 (5)	0.4727 (4)	0.4588 (7)	0.4115 (15)	0.4700 (6)	0.5151 (1)	0.4172 (14)	0.3948 (22)	0.4237 (11)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.3828 (24)	0.3629 (29)	0.4410 (9)	0.4056 (17)	0.4218 (12)	0.3783 (25)	0.4015 (19)	0.4826 (3)	0.4576 (8)	0.3677 (28)
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.3460 (30)	0.4006 (20)	0.4195 (13)	0.3878 (23)	0.3949 (21)	0.3732 (26)	0.4251 (10)	0.4108 (16)	0.4052 (18)	0.3729 (27)

#### 4 总结

本文提出一种新的对  $DMUs$  进行排序的方法。该方法是通过在 DEA 模型中引入一个输入最小输出最大的理想  $DMU$  来得到一组合理的公共权重, 在这组公共权重的基础上求得所有  $DMUs$  的相对效率指数以进行排序。文中的两个数据实例说明用该方法能够得到合理有效的排序结果。

#### 参考文献

- [1] Zilla S, Friedman L. DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units [J]. Eur. J. of Oper. Res., 1998, 111: 470-478.
- [2] 谢昌芸, 樊相宇. 我国邮电工业企业相对效益的 DEA

分析 [J]. 陕西师范大学学报, 1999, (5): 98-102.

- [3] 樊相宇, 谢昌芸. 邮电高校办学效益的 DEA 分析 [J]. 西安邮电学院学报, 1999, (6): 38-41.
- [4] Toshiyuki Sueyoshi, Kenji Ohnishi, Youichi Kinase. A benchmark approach for baseball evaluation [J]. Eur. J. of Oper. Res., 1999, 115: 429-448.
- [5] 盛昭翰, 朱乔, 吴广谋. DEA 理论、方法与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [6] 赵勇, 岳超源, 陈廷. 数据包络分析中有效单元的进一步分析 [J]. 系统工程学报, 1995, (10): 95-100.