

随机参数二叉树期权定价方法及其模拟研究

付德才

(厦门大学管理学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 本文将股票波动性随机变化的因素考虑到二叉树期权定价模型中, 得到了可以用数值计算方法实现的一个期权定价方法, 该公式比传统二叉树模型更能反映股票波动的异方差性。以五粮液认购权证与五粮液认沽权证为样本, 运用马尔科夫链蒙特卡罗方法对其进行了模拟分析, 并与B-S模型进行了比较。

关键词: 期权定价; 二叉树模型; 权证模型

Abstract: In this paper, we make a revision for the CRR-RB option pricing model based on the fact that stock volatility is variable, and we get a new option pricing formula which can be calculated by computation method. The new formula reflects the fluctuation of stock volatility. We finally verify our model using the data of the Five-Grain Liquor call warrant and put warrant in Chinese stock market. We offer in-depth analysis on the implementation of the formula, adopting Hastings-Metropolis algorithm and Monte-Carlo numerical integration of importance sampling for computing the formula.

Key words: Option pricing, binominal tree model, warrants

作者简介: 付德才, 厦门大学管理学院博士生, 研究方向: 资产定价。

中图分类号: F830.9 文献标识码: A

定价问题是期权的核心。期权定价模型可以分为连续时间模型和离散时间模型两类。由于股票收益率的波动性在衍生品定价、特别是期权定价中的极端重要性, 学术界和实务界对于波动性都有很多重要的研究。其中一个方向是考虑标的资产波动性不是常数, 而是一个随机变量。这个方向在近年来得到了深入研究的一个重要原因是, 大量实证研究表明, 股票价格的波动性是随着时间而变化的。连续时间下的Black-Scholes期权定价模型(1973)在一方面进行了很多扩展或深化, 包括GARCH类和EGARCH类定价方法, 这类连续型的期权定价一般是没有封闭解的。目前, 对于离散型期权定价在这一方面的讨论还比较少。在本文中, 我们从经典的离散模型CRR-RB二叉树期权定价公式出发, 将波动性变化反映到二叉树期权定价公式中, 对其进行了一定的改进。

模型的建立

在固定参数下, n 期的CRR-RB二叉树期权定价公式一般表述为:

$$C = (1/r)^n \sum_{k=0}^n n! / [K!(n-k)!] p^k (1-p)^{n-k} \max[0, u^k d^{n-k} S - E] \quad (1)$$

其中, C 是期权价格; E 是期权执行价格; S 是股票当前价格; n 是期权到期的阶段数; d 为股票价格下降的比例+1; u 为股票价格上升的比例+1; r 为无风险利率+1; $p = (r-d)/(u-d)$ 。在模型中假设 $u > r > d$, 因此 $0 < p < 1$ 。

注意到在(1)中关于二项分布的参数 u 和 d 是事先就知道的固定参数。因为 u 和 d 分别代表了股票上涨和下降的幅度, 如果 u 和 d 在整个 n 个时期中都不变, 就是说股票的波动性是保持不变的, 即在二叉树期权定价公式中股票波动性是固定不变的。

为了将股票收益率的波动性是变化的这一情况反映在公式中, 下面将 u 和 d 考虑为随机变量。在(1)式中, 二叉树期权定价公式可以看作是在给定确定的 u 和 d 情况下的期权价格, 即 $C(S, E, n | u, d)$ 。也就是说, 如果将 u 和 d 视作随机变量, 且其联合分布的密度函数为 $f(x, y)$, 那么期权价格为:

$$C(S, E, n) = \int \int C(S, E, n | x, y) f(x, y) dx dy$$

由于 d/r 和 r/u 位于 $0-1$ 之间, 而且是非对称的连续变量, 符合Beta分布的特征, 而且Beta分布具有很好的数学性

质, 因此, 为了进行进一步的分析, 假设:

(1) r 是固定的, 而 u 和 d 是随机变量;

(2) d/r 和 r/u 是独立随机变量;

$x = d/r \sim \text{Beta}(\cdot; \beta_1, \beta_2), 0 < x < 1$

$y = r/u \sim \text{Beta}(\cdot; \alpha_1, \alpha_2), 0 < y < 1$

Beta分布中的参数空间:

$\Omega_x = \{(\beta_1, \beta_2); \beta_1 > 0, \beta_2 > 0\}$

$\Omega_y = \{(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0\}$

(3) 二叉树模型中的其他假设保持不变。

模型求解

由于 $u > r > d$, 因此 d/r 和 r/u 都是介于 0-1 之间的随机变量。

注意到: $p = (r-d)/(u-d) = (1-d/r)/(u/r-d/r) = (1-x)/(1/y-x) = y(1-x)/(1-xy)$,

以及: $1-p = 1-y(1-x)/(1-xy) = (1-y)/(1-xy)$

因此, CRR 二叉树期权定价公式(1)可以重新写为:

$$C = S \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} y^k (1-y)^{n-k} (1-xy)^n \max[0, x^{n-k} / y^k - C^*] \quad (2)$$

其中 $x = d/r, y = r/u, C^* = E(r^n S)$

这样(4)式的期权定价就是 x 和 y 的函数。根据模型对于 x, y 的假设, x, y 服从相互独立的 Beta 分布, 因此 x, y 的联合密度函数是:

$$f(x, y) = 1/[B(\alpha_1, \alpha_2)B(\beta_1, \beta_2)] x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\beta_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-y)^{\beta_2-1} \quad (3)$$

其中 $B(\cdot)$ 是 Beta 函数。

根据(2)式, 期权价格为:

$$C = C(S, E, n) = \int \int C(S, E, n | x, y) f(x, y) dx dy$$

经过计算, 新的期权定价公式可以写为:

$$C = S [B(\alpha_1, \alpha_2) B(\beta_1, \beta_2)] \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} [A(k) - C^* B(k)] \quad (4)$$

(4)式就是我们得到的在随机参数下的一般化期权二叉树定价公式。

尽管 $A(k)$ 和 $B(k)$ 的形式非常复杂, 但由于这两个数列都是绝对收敛的, 因此在实际的计算中可以采取近似估计。要得到期权的理论价格, 需要使用数值方法。

模拟分析

以上得到的改进模型, 其解析解无法直接计算, 需要通过数值计算方法才能得到具体的期权定价。我们采用数学中的 Hastings-Metropolis 算法和重要取样的 Monte-Carlo 数值积分方法。

下面对传统的 B-S 模型和本文的修正的二叉树模型进行模拟分析与比较。由于我国市场中只有权证没有期权, 因此我们采用权证的数据, 样本采用我国证券市场的五粮液认购权证、五粮液认沽权证。通过数据分析, 我们一方面试图比较一下各个模型的计算结果和市场真实价格的关系, 同时也通过多个模型的计算, 来看一下我国权证产品在价格表现上的一些特征和问题。

一、样本分析

本章是以 2006 年 4 月 3 日至 2007 年 4 月 2 日的五粮液认购权证、五粮液认沽权证、五粮液股票为研究对象, 研究分析它们的价格行为, 共取 243 个样本。其中, 所有数据均来自深圳证券交易所和 Wind 资讯。

由图 1 五粮液股价对数收益率描述统计可以看出, 偏度大于 0, 峰度大于 3, 不是正态分布, 与 B-S 期权定价公式以及二叉树定价公式的假设并不完全相符合。

二、B-S 模型和随机参数模型的模拟分析

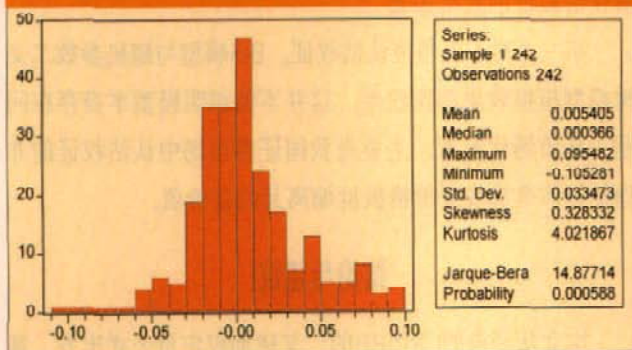
B-S 模型有通用的计算软件可以实现, 只需要确定其中的参数的计算方法。首先计算历史波动率。历史波动率就是从标的资产价格的历史数据中计算出价格收益率的标准差。

$$R_t = \ln(P_t / P_{t-1})$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(R) = 1/(T-1) \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2$$

其中, P_t 为股票的收盘价格, R_t 为股票价格对数收益率, \bar{R} 为收益率均值, $\text{Var}(R)$ (或者 σ^2) 则为收益率(估计)方差, σ 就是相应的标准差(波动率)。上述计算的波动率是日

图1 五粮液股价对数收益率描述统计



波动率，需要转换为年波动率。转换时，我们按照一年250个交易日进行计算。

在实际计算时，历史时间的选择往往很不容易。从统计的角度来看，时间越长，数据越多，获得的精确度一般越高。但是，资产价格收益率的波动率却又常常随时间而变化，太长的时间段反而可能降低波动率的精确度。因此，本文计算波动率时，使用3个月的历史数据。

关于无风险利率的选取。一般来说，无风险收益率采用1个月或者3个月的国债收益率或者同业拆借利率较为合适，但由于中国现在的债券市场、同业拆借市场还不够健全，有关数据并不能真实反映市场资金利率的实际状况，因此，采用一年期整存整取存款利率作为无风险收益率比较合适。2006年4月3日至2007年4月2日的一年期整存整取存款利率为2.52%。

对随机参数服从独立Beta分布的随机参数二叉树模型，采用数学中的Hastings-Metropolis算法和重要取样的Monte-Carlo数值积分方法，进行了模拟计算。

利用以上方法，最终的模拟结果分别见图2、图3、图4、图5。其中偏离度的计算公式为：

$$\text{偏离度} = (\text{模拟价格} - \text{实际价格}) / \text{实际价格} \times 100\%$$

图2 五粮液认购权证理论与实际价格比较



图3 五粮液认购权证模拟价格与实际价格偏离度比较

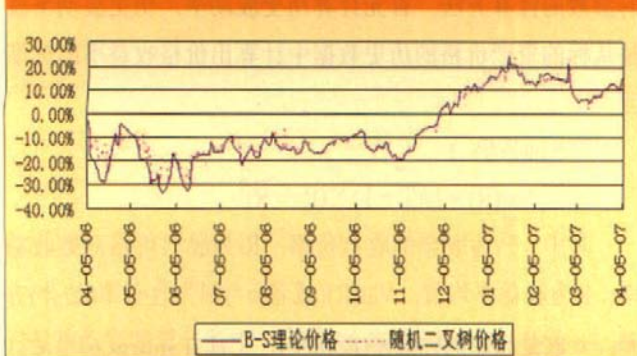


图4 五粮液认沽权证理论与实际价格比较

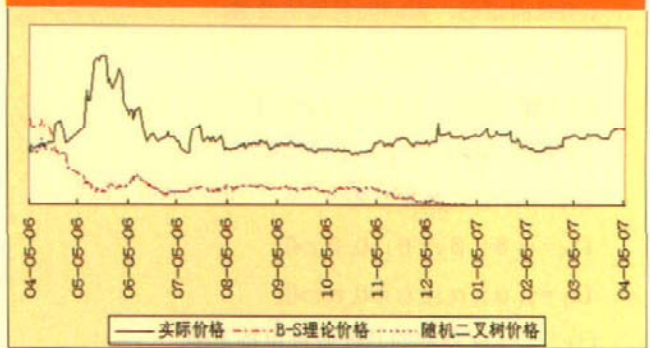
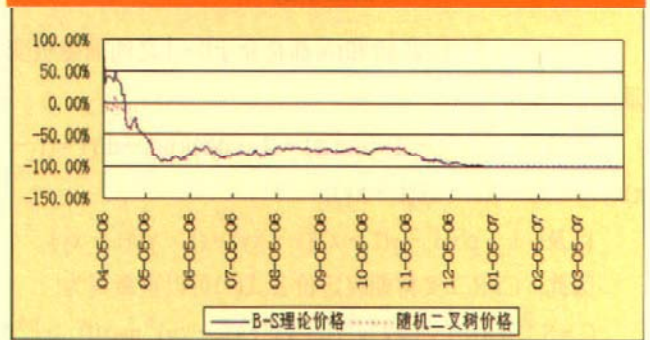


图5 五粮液认沽权证模拟价格与实际价格偏离度比较



通过比较以上模拟结果，可以发现，第一，尽管B-S模型在数学形式上要比本文推导的随机参数二叉树模型简单，但实际定价效果看，两者相差不大。这表明B-S模型尽管看似假设多、形式简单，但实际上与随机形式下的定价结果很接近。B-S模型形式简洁，计算简单，结果比较准确，应用面广，这也是三十多年来没有任何一个期权定价模型完全超越B-S模型的原因所在。

第二，对于五粮液认购权证和认沽权证，B-S模型和本文推导的随机参数二叉树模型都相差很大，两个理论模型的结果与实际价格的模拟效果都很差。在五粮液认购权证初期，随机参数二叉树模型的效果比较好，B-S模型效果很差。大多数时点，B-S模型与随机参数二叉树模型模拟五粮液认沽权证的效果很差。

第三，对于五粮液认沽权证，B-S模型与随机参数二叉树模型模拟效果都比较差，这并不能说明模型本身存在问题，从市场状况看，主要是我国证券市场中认沽权证的非理性炒作造成权证价格极度偏离其内在价值。

结论与建议

本文从经典的CRR-RB的二叉树期权定价公式出发，基

于股票波动性是变化的这一事实,对CRR-RB的二叉树期权定价公式进行了一定的改进,将波动性变化反映到二叉树期权定价公式,得到了可以用数值计算方法实现的一个期权定价方法,该公式比传统二叉树模型更能反映股票波动的异方差性。但由于这个公式比较复杂,只能通过数值计算方法来实现,我们采用五粮液认购权证与五粮液认沽权证,运用马尔科夫链蒙特卡罗方法(Markov chain Monte Carlo)对其进行了模拟分析。通过与B-S模型比较,研究发现,从模拟效果上看,随机参数二叉树模型与B-S模型相差不大,但计算方法要远比B-S模型复杂得多。B-S模型形式简洁,计算简单,结果比较准确,应用面广,这也是三十多年来没有任何一个期权定价模型完全超越B-S模型的原因所在。对于五粮液认沽权证,B-S模型与随机参数二叉树模型模拟效果都比较差,这并不能说明模型本身存在问题,主要是我国证券市场中认沽权证的非理性炒作造成的。

随着证券市场规模的扩大与完善,稳妥推进金融衍生产品市场建设,对于扩大金融现货市场规模,丰富交易品种,改善市场结构,完善市场功能,优化资源配置,乃至稳定资本市场,增强国民经济的抗风险能力,具有重要的意义。应尽快丰富我国金融衍生品的种类和数量,特别是尽快推出标准化期权,使得金融产品的价格与其理论价值合理接近。本文发展的改进的随机二叉树模型以及B-S模

型都表明,我国目前的权证产品在定价上已经严重偏离理论价值,完全是投机炒作,很重要的原因是我国金融衍生品种类和数量太少,应该大力发展股票期权等金融衍生品。在发展期权的过程中,应结合我国金融市场实际,以B-S模型为基础,研究更适合我国市场实际的期权定价公式,多方位揭示期权的理论价格,作为投资者提示风险的工具。

参考文献:

- [1] Black, F., and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(May-June 1973), 637-59.
- [2] Boyle, P. P., and D. Emanuel. Discretely Adjusted Option Hedges, *Journal of Financial Economics*, 8(1980), 259-82.
- [3] Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7(October 1979), 229-64.
- [4] Hull, J. C., and A. White. Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options, *Journal of International Money and Finance*, 6(June 1987), 131-52.
- [5] Hull, J. C., and A. White. The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(September 1988), 237-51.
- [6] Omberg. Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, 59(1990), 347-70.
- [7] Rendleman, R., and B. Bartter. Two State Option Pricing, *Journal of Finance*, 34(1979), 1092-1110.
- [8] Schwartz, E. S. The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach, *Journal of Financial Economics*, 4(2004), 79-94.

(上接第41页)

参考文献:

- [1] Affleck-Graves John, Shantaram P. Hedge, and Robert E. Miller, 1994, "Trading Mechanisms and the Components of the Bid-Ask Spread", *Journal of Finance*, 49(4), 1471-1488.
- [2] Bollerslev, T., 1986, "Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307 - 327.
- [3] Bollerslev, T., and Melvin, M., 1994, "Bid-Ask Spreads and Volatility in the Foreign Exchange Market: An Empirical Analysis", *Journal of International Economics* 36, 355-372.
- [4] Copeland, T.E., and Dan Galai, 1983, "Information Effects on the Bid-Ask Spread", *The Journal of Finance* 38(5), 1457-1469.
- [5] Demsetz Harold, 1968, "The Cost of Transacting", *The Quarterly Journal of Economics* 82(1), 33-53.
- [6] George, Thomas J., and Francis A. Longstaff, 1993, "Bid-Ask Spreads and Trading Activity in the S&P 100 Index Options Market", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28(3), 381-397.
- [7] Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D.E., 1993, "On The Relation between The Expected Value and The Volatility of Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- [8] McNish, Thomas H., and Robert A. Wood, 1992, "An Analysis of Intraday Patterns in Bid/Ask Spreads for NYSE Stocks", *Journal of Finance* 47(2), 753-764.
- [9] Stoll, H. R., 1989, "Inferring the Components of the Bid-Ask Spread: Theory and Empirical Tests", *Journal of Finance* 44, 115-134.
- [10] 雷觉铭, 曾勇. 上海股市买卖价差成分分析[J]. *系统工程*, 2006,(6).
- [11] 宁向东, 齐险峰. 关于买卖报价价差及其决定因素的实证研究[J]. *数量经济技术经济研究*, 2002,(6).
- [12] 屈文洲, 吴世农. 中国股票市场微观结构的特征分析——买卖报价价差模式及影响因素的实证研究[J]. *经济研究*, 2002,(1).
- [13] 孙培源, 施东晖. 微观结构、流动性与买卖价差: 一个基于上海股市的经验研究[J]. *世界经济*, 2002,(2).
- [14] 杨之曙, 姚松瑶. 沪市买卖价差和信息性交易实证研究[J]. *金融研究*, 2004,(4).