

# 一类求解 Hamilton-Jacobi 方程的交错网格差分格式

邱建贤 戴嘉尊

(南京航空航天大学理学院 南京, 210016)

**摘要** Hamilton-Jacobi 方程在控制论和微分对策中有广泛的应用, 由于其表达形式与双曲守恒律方程极为相近, 这有利于借助于求解双曲守恒律方程的差分格式来构造求解 Hamilton-Jacobi 方程的差分格式。文中将 Hamilton-Jacobi 方程变化为双曲守恒律方程, 利用求解双曲守恒律方程的交错网格的 Gauss 型差分格式, 构造了一类求解 Hamilton-Jacobi 方程的交错网格的 Gauss 型差分格式。这类格式具有高分辨、计算简便等优点。最后针对一系列的一维和二维问题进行了数值试验, 试验结果很令人满意。

**关键词:** 守恒定律; 差分格式; Hamilton-Jacobi 方程

**中图分类号:** O 241; O 35

## 引言

在本文中, 作者考虑以下的一阶 Hamilton-Jacobi 方程初值问题的数值解法。

$$\begin{cases} \phi_t + f(\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \dots, \phi_{x_n}) = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

Hamilton-Jacobi 方程在控制论和微分对策中有广泛的应用。众所周知, 即使在初值条件  $\phi_0(x)$  是充分光滑的情况下, 一般来说, 虽可以得到式(1)的连续解, 但其解的导数却是间断的。因此, 寻求具有高分辨、不振荡等良好性质的方法一直是计算数学工作者大力研究的问题。由于 Hamilton-Jacobi 方程和双曲守恒律

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_k(u)}{\partial x_k} = 0 \quad (2)$$

非常相近, 实际上, 在一维( $n=1$ )的情况下, 设  $u = \phi$ , 那么, 式(1)等价于式(2)。在  $n > 1$  的情况下虽然没有这种直接的关系, 但在某种意义上仍然可以认为式(1)是由式(2)“积分一次”得到的。正是由于这种关系, 使得可以借助于现有的求解双曲守恒律的差分格式来构造求解

\* 航空科学基金(编号: 96A 52004)资助项目。

收稿日期: 1999-12-17; 修改稿收到日期: 2000-03-20

第一作者: 邱建贤, 男, 副教授, 1963 年 2 月生。

式(1)的差分格式。在文[1]中,Crandal 和 Lions 给出一类求解式(1)的单调格式,这类格式虽是收敛的,但却只是一阶格式。在文[2]中,Osher 和 Shu 将求解式(2)的 ENO 格式应用求解式(1),数值实验结果表明,该格式是一个高分辨的格式,但实施具体的计算很不方便。

本文在交错网格的情况下,将求解双曲守恒律式(2)的二阶显式 Gauss 型格式,应用于求解式(1),这类格式具有高分辨、计算简便等优点。最后进行了数值试验,试验结果是很令人满意的。

## 1 一维 Hamilton-Jacobi 方程的差分格式

当  $n=1$  时,Hamilton-Jacobi 方程(1)可写为

$$\begin{cases} \Phi_t + f(\Phi) = 0 \\ \Phi(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad (3)$$

令  $u(x, t) = \Phi(x, t)$ , 对式(3)求关于  $x$  的偏导数,可得到一维单个双曲守恒律

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $u_0(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$ 。

记空间步长为  $\Delta x$ , 时间步长为  $\Delta t$ , 步长比  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ ,  $x_j = j\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$ ,  $x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ ,  $t_{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ ,  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ ,  $I_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$ 。

用  $v_j^n$  和  $v_{j+1/2}^{n+1/2}$  分别表示  $u(x, t)$  在时间层  $t_n$  和  $t_{n+1/2}$  时在格子  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  和  $I_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$  的平均值,即

$$v_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(x, t_n) dx \quad v_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j+1/2}} u(x, t_{n+1/2}) dx$$

在每个时间层上利用线性逼近对平均值函数进行重构

$$v(x, t) = v_j + \frac{x - x_j}{\Delta x} v_j, \quad x \in I_j; \quad v(x, t) = v_{j+1/2} + \frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta x} v_{j+1/2}, \quad x \in I_{j+1/2}$$

其中,  $\frac{1}{\Delta x} v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + O(\Delta x)$ 。

利用重构函数代替方程(4)中的函数  $u(x, t)$ , 并分别在区间  $[t_n, t_{n+1/2}] \times I_{j+1/2}$  和  $[t_{n+1/2}, t_{n+1}] \times I_j$  上积分, 并利用两点 Gauss 求积公式逼近中的积分, 得到在交错网格情况下的 Gauss 型格式

$$v_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (v_{j+1}^n + v_j^n) - \frac{1}{8} (v_{j+1} - v_j) - \lambda (h_{j+1}^n - h_j^n) \quad (5a)$$

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2} (v_{j+1/2}^{n+1/2} + v_{j-1/2}^{n+1/2}) - \frac{1}{8} (v_{j+1/2} - v_{j-1/2}) - \lambda (h_{j+1/2}^{n+1/2} - h_{j-1/2}^{n+1/2})$$

$$h_j^n = \frac{1}{2} (f(v_j - h_1 f_j) + f(v_j - h_2 f_j))$$

$$h_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (f(v_{j+1/2}^{n+1/2} - h_1 f_{j+1/2}) + f(v_{j+1/2}^{n+1/2} - h_2 f_{j+1/2})) \quad (5b)$$

其中,  $\frac{1}{\Delta x} f = \frac{\partial (v(x, t))}{\partial x} + O(\Delta x)$ ,  $h_1 = \lambda(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})$ ,  $h_2 = \lambda(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})$ .

利用 Taylor 展开式, 容易证明:

定理 1 由式(5)定义的 Gauss 型格式除在函数  $u(x, t)$  的驻点外是二阶格式.

定理 2 如果 Gauss 格式(5)中的数值导数  $v_j/h, f_j/h$  满足以下条件

$$v_j \Delta v_{j+1/2}^n - \alpha |MM(\Delta v_{j+1/2}^n, \Delta v_{j-1/2}^n)|, \quad f_j \Delta v_{j+1/2}^n - \beta |MM(\Delta v_{j+1/2}^n, \Delta v_{j-1/2}^n)| \quad (6a)$$

$$v_{j+1/2} \Delta v_{j+1}^{n+1/2} - \alpha |MM(\Delta v_{j+1}^{n+1/2}, \Delta v_j^{n+1/2})|, \quad f_{j+1/2} \Delta v_{j+1}^{n+1/2} - \beta |MM(\Delta v_{j+1}^{n+1/2}, \Delta v_j^{n+1/2})| \quad (6b)$$

那么, 在 CFL 条件(7)的限制下, 格式(5)为 TVD 格式.

$$\lambda \sup |f(v)| \quad CFL = \lambda \frac{\beta}{\alpha} \quad \frac{1}{2\alpha} (\sqrt{4 + 4\alpha - \alpha^2} - 2) \quad (7)$$

证明 由于

$$v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2} = \Delta v_{j+1/2}^n (\frac{1}{2} - \lambda \frac{\Delta g_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n}) + \Delta v_{j-1/2}^n (\frac{1}{2} + \lambda \frac{\Delta g_{j-1/2}^n}{\Delta v_{j-1/2}^n})$$

其中,  $g_j^n = h_j^n + \frac{1}{8\lambda} v_j$ ,  $\Delta g_{j+1/2}^n = g_{j+1}^n - g_j^n$ , 而

$$\begin{aligned} & \lambda \left| \frac{\Delta g_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \quad \frac{\Delta}{2} \left( \left| \frac{f(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - f(v_j^n - h_1 f_j)}{(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - (v_j^n - h_1 f_j)} \right| \times \right. \\ & \left. \left| \frac{(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - (v_j^n - h_1 f_j)}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| + \left| \frac{f(v_{j+1}^n - h_2 f_{j+1}) - f(v_j^n - h_2 f_j)}{(v_{j+1}^n - h_2 f_{j+1}) - (v_j^n - h_2 f_j)} \right| \times \right. \\ & \left. \left| \frac{(v_{j+1}^n - h_2 f_{j+1}) - (v_j^n - h_2 f_j)}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \right) + \frac{1}{8} \left| \frac{\Delta v_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \end{aligned}$$

由式(7)的 CFL 条件可知

$$\lambda \left| \frac{f(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - f(v_j^n - h_1 f_j)}{(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - (v_j^n - h_1 f_j)} \right| \quad CFL, \quad i = 1, 2$$

而  $\left| \frac{(v_{j+1}^n - h_1 f_{j+1}) - (v_j^n - h_1 f_j)}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \quad 1 + h_1 \left| \frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right|, \quad i = 1, 2$

由式(6a, 7)有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta v_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \quad \max \left( \left| \frac{v_{j+1}}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right|, \left| \frac{v_j}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \right) \quad \alpha \\ & \left| \frac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \quad \max \left( \left| \frac{f_{j+1}}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right|, \left| \frac{f_j}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \right) \quad \beta = \frac{1}{\lambda} \alpha \cdot CFL \end{aligned}$$

所以:  $\lambda \left| \frac{\Delta g_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n} \right| \quad \frac{1}{2} [CFL \cdot (1 + h_1 \beta) + CFL (1 + h_2 \beta)] + \frac{1}{8} \alpha = CFL (1 + \frac{1}{2} \alpha CFL) + \frac{1}{8} \alpha$

$\frac{1}{2}$ , 所以,  $TV(v^{n+1/2}) \quad |v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2}| = \left| \Delta v_{j+1/2}^n (\frac{1}{2} - \lambda \frac{\Delta g_{j+1/2}^n}{\Delta v_{j+1/2}^n}) + \Delta v_{j-1/2}^n (\frac{1}{2} + \lambda \frac{\Delta g_{j-1/2}^n}{\Delta v_{j-1/2}^n}) \right|$

$\lambda \left| \frac{\Delta g_{j-1/2}^n}{\Delta v_{j-1/2}^n} \right| \quad |\Delta v_{j+1/2}^n| \quad TV(v^n)$ . 同理可证:  $TV(v^{n+1}) \quad TV(v^{n+1/2})$ . 因此, 有

$TV(v^{n+1}) \quad TV(v^n)$ . 所以, Gauss 型格式(5) 在式(6, 7) 的限制下为 TVD 格式.

求解方程(3), 首先利用格式(5) 求解方程(4), 然后利用式(8) 求解方程(3)

$$\Phi^1 = \Phi - \frac{1}{2} \Delta t (f(v_j^n) + f(v_j^{n+1})) \quad (8)$$

## 2 二维 Hamilton-Jacobi 方程的差分格式

当  $n = 2$  时, Hamilton-Jacobi 方程(1)可写为

$$\begin{cases} \phi_+ f(\phi_x, \phi_y) = 0 \\ \phi_{x,y}(0) = \phi(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

令  $u_1(x, t) = \phi(x, y, t), u_2(x, t) = \psi(x, y, t)$ , 分别对式(9a)求关于  $x$  和  $y$  的偏导数, 可得到以下的二维双曲守恒律方程组的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $U = (u_1, u_2)^T, F(U) = (f(U), 0)^T, G(U) = (0, f(U))^T, U_0(x, y) = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y})^T$ .

记  $x$  和  $y$  方向的空间步长分别为  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 时间步长为  $\Delta t$ ,  $x$  和  $y$  方向的步长比分别为  $\lambda = \Delta t/\Delta x$  和  $\mu = \Delta t/\Delta y$ ,  $x_j = j\Delta x, y_k = k\Delta y, t_n = n\Delta t, x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})\Delta x, y_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})\Delta y, I_{j,k} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}], I_{j+1/2, k+1/2} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ .

用  $V_{j,k}$  和  $V_{j+1/2, k+1/2}$  分别表示  $U(x, y, t)$  在时间层  $t$  时在区域  $I_{j,k}$  和  $I_{j+1/2, k+1/2}$  上的平均值, 即

$$V_{j,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{j,k}} U(x, y, t) dx dy, \quad V_{j+1/2, k+1/2} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{I_{j+1/2, k+1/2}} U(x, y, t) dx dy$$

在每个时间层上利用线性逼近对平均值函数进行重构

$$V(x, y, t_n) = V_{j,k}^n + \frac{x - x_j}{\Delta x} V_{j,k}^n + \frac{y - y_k}{\Delta y} W_{j,k}^n(x, y) \quad I_{j,k}$$

$$V(x, y, t_{n+1/2}) = V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + \frac{x - x_{j+1/2}}{\Delta x} V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + \frac{y - y_{k+1/2}}{\Delta y} W_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}(x, y) \quad I_{j+1/2, k+1/2}$$

其中,  $\frac{1}{\Delta x} V = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + O(\Delta x), \quad \frac{1}{\Delta y} W = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial y} + O(\Delta y)$  (11)

利用重构函数代替方程(1)中的函数  $U(x, y, t)$ , 并分别在区间  $[t_n, t_{n+1/2}] \times I_{j+1/2, k+1/2}$  和  $[t_{n+1/2}, t_{n+1}] \times I_{j,k}$  上积分, 利用两点 Gauss 求积公式逼近关于  $t$  的积分, 利用梯形求积公式逼近关于  $x$  和  $y$  的积分, 得到在交错网格情况下的 Gauss 型格式

$$\begin{aligned} V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} = & \frac{1}{4} (V_{j+1, k+1}^n + V_{j+1, k}^n + V_{j, k+1}^n + V_{j, k}^n) - \frac{1}{16} (V_{j+1, k}^n - V_{j, k}^n + V_{j+1, k+1}^n - \\ & V_{j, k+1}^n + W_{j+1, k}^n + W_{j+1, k+1}^n + W_{j, k}^n - W_{j, k+1}^n) - \frac{\lambda}{2} (H_{j+1, k}^n - H_{j, k}^n + H_{j+1, k+1}^n - \\ & H_{j, k+1}^n) - \frac{\mu}{2} (R_{j, k+1}^n - R_{j, k}^n + R_{j+1, k+1}^n - R_{j+1, k}^n) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$V_{j, k}^{n+1} = \frac{1}{4} (V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + V_{j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} + V_{j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} + V_{j-1/2, k-1/2}^{n+1/2}) - \frac{1}{16} (V_{j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} -$$

$$V_{j-1/2, k-1/2}^{n+1/2} + V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - V_{j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} - W_{j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} + W_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + W_{j-1/2, k-1/2}^{n+1/2} -$$

$$\begin{aligned}
W_{j-1/2, k+1/2} &= \frac{\Delta}{2} (H_{j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} - H_{j-1/2, k-1/2}^{n+1/2} + H_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - H_{j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}) - \\
&\frac{\mu}{2} (R_{j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} - R_{j-1/2, k-1/2}^{n+1/2} + R_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - R_{j+1/2, k-1/2}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{12b}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_{j,k}^n &= \frac{1}{2} (F(V_{j,k}^n - h_1 F_{j,k}) + F(V_{j,k}^n - h_2 F_{j,k})) \\
R_{j,k}^n &= \frac{1}{2} (G(V_{j,k}^n - h_3 G_{j,k}) + G(V_{j,k}^n - h_4 G_{j,k})) \\
H_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (F(V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - h_1 F_{j+1/2, k+1/2}) + F(V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - h_2 F_{j+1/2, k+1/2})) \\
R_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (G(V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - h_3 G_{j+1/2, k+1/2}) + G(V_{j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - h_4 G_{j+1/2, k+1/2})) \\
h_1 &= \lambda \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right), h_2 = \lambda \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right), h_3 = \mu \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right), h_4 = \mu \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\
\frac{1}{\Delta x} F &= \frac{\partial F(U(x, y, t))}{\partial x} + O(\Delta x), \quad \frac{1}{\Delta y} G = \frac{\partial G(U(x, y, t))}{\partial y} + O(\Delta y)
\end{aligned}$$

数值微分  $V, W, F, G$  的每一个分量按式(6)的定义选取。将格式(12)应用于方程(10)的求解, 并用格式(13)计算方程(9)

$$\phi_{j,k}^1 = \phi_{j,k} - \frac{1}{2} \Delta t (f(V_{j,k}^n) + f(V_{j,k}^{n+1})) \tag{13}$$

### 3 数值试验

在本节中, 分别利用 § 1 和 § 2 中给出的计算一维和二维 Hamilton-Jacobi 方程的差分格式进行数值试验。

例 1 对于一维问题的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} \phi_t + f(\phi) = 0 \\ \phi(x, 0) = -\cos(\pi x) \end{cases} \quad -1 \leq x < 1 \tag{14}$$

分别考虑函数  $f(u)$  为凸的(a)和非凸的(b)的两种情况。

$$(a) f(u) = (u+1)^2/2 \quad (b) f(u) = -\cos(u+1)$$

取空间步长  $\Delta x$  为 0.05, 数值微分中的  $\alpha = 1, CFL = 0.32$ 。分别计算时间  $0.5/\pi^2$  和  $1.5/\pi^2$  时的解。计算结果如图 1(a, b), 图 2(a, b)。图中的实线表示 Hamilton-Jacobi 方程的精确解。

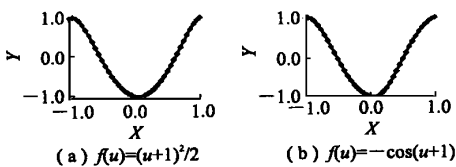


图 1 计算结果 ( $\Delta x = 0.05, t = 0.5/\pi^2$ )

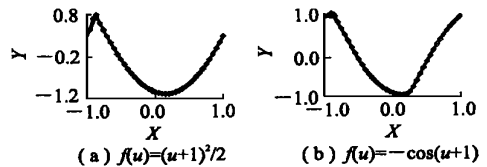


图 2 计算结果 ( $\Delta x = 0.05, t = 1.5/\pi^2$ )

例 2 考虑二维非凸的 Hamilton-Jacobi 问题

$$\phi_t + \sin(\phi_x + \phi_y) = 0 \quad \phi(x, y, 0) = \pi(|y| - |x|) \tag{15}$$

取空间步长  $\Delta x = \Delta y$  分别为 0.05 和 0.025, 数值微分中的  $\alpha = 1, CFL = 0.32$ 。计算时间  $t = 1$

时的解。计算结果如图 3, 4 所示。

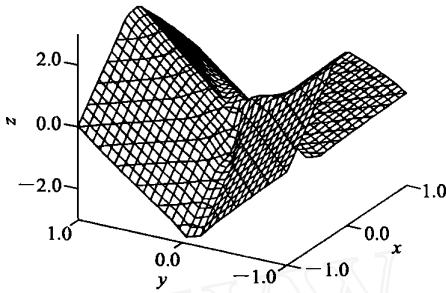


图 3  $f(u, v) = \sin(u + v)$   
 $\Delta x = \Delta y = 0.05, t = 1.0$

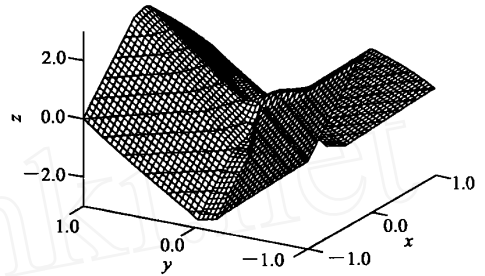


图 4  $f(u, v) = \sin(u + v)$   
 $\Delta x = \Delta y = 0.025, t = 1.0$

从计算结果可以看出, 利用交错网格的差分格式进行计算具有简单方便, 而且在解的光滑区域有高阶精度, 在导数的不连续处具有高分辨的特点。因此, 交错网格的差分格式是一种有效的格式。

#### 参 考 文 献

- 1 Crandall M, Lions P. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans Amer Math Soc, 1983, 277(1): 1~ 42
- 2 Osher S, Shu C W. High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations. SIAM Numer Anal, 1991, 28(4): 907~ 922
- 3 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J Comp Phys, 1983, 49: 357~ 393
- 4 Nssyahu H, Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. J of Comp Phys, 1990, 87: 408~ 463

## A Class of Difference Schemes with Staggered Grids for Hamilton-Jacobi Equation

Qiu Jianxian    Dai Jiazun

(College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016)

**Abstract** Hamilton-Jacobi (HJ) equations are frequently encountered in applications, e.g., in differential games and control theory, they are closely related to hyperbolic conservation laws. It is helpful for us to construct difference approximation schemes for HJ equation with aids of schemes for conservation laws. This paper presents a class Gauss schemes with staggered grids for HJ equation, based on Gauss schemes with staggered grids for conservation laws. The schemes are numerically tested on a variety of 1D and 2D problems; the solutions obtained in computation are satisfied.

**Key words:** conservation laws; difference scheme; Hamilton-Jacobi equation