

# 求解非线性特征值问题的两种迭代投影法

李长伟<sup>1</sup>, 卢琳璋<sup>2\*</sup>

(1. 中南大学地球科学与信息物理学院, 湖南 长沙 410083; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 研究求解大型非线性特征值问题的两种迭代投影法: 非线性有理 Krylov 子空间法和非线性 Arnoldi 方法. 通过引入精化策略和不精确求解线性系统的思想, 给出了精化有理 Krylov 方法和不精确非线性 Arnoldi 方法的实用算法, 通过数值算例验证了改进后的方法可以提高计算的效率.

**关键词:** 非线性特征值; 迭代投影法; Arnoldi 方法; 有理 Krylov 方法

**中图分类号:** O 241

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0438-0479(2011) 04-0669-05

近年来, 在科学工程计算的许多领域提出了求解非线性特征值的问题, 如流固耦合振动数值模拟的问题<sup>[1-2]</sup>、加速器设计中的电磁场数值模拟等<sup>[3-4]</sup>. 由于线性化增大了问题的规模和条件数, 所以, 对于大型的非线性特征值问题, 通常采用投影类算法来求解<sup>[5-8]</sup>, 如非线性的 Arnoldi 方法、Jacobi+Davidson 方法、Lanczos 方法等<sup>[9-13]</sup>.

Ruhe 提出了有理 Krylov 方法<sup>[14]</sup> (以下简称 NLRKS). Voss 在文献[15]中给出了 Arnoldi 算法 (以下简称 NLAM). 本文中作者将精化策略和内外迭代不精确求解线性系统的思想与这 2 种方法结合起来, 形成了精化非线性有理 Krylov 方法 (以下简称 RNLRKS) 和不精确的非线性 Arnoldi 方法 (以下简称 INLAM), 并对其实现技术进行了讨论, 给出了实用算法. 下文中如对所用范数无特殊说明, 均指 2 范数.

## 1 NLRKS 和 NLAM

### 1.1 非线性特征值问题

讨论如下形式的方程:

$$T(\lambda)x = 0, \quad (1)$$

其中  $T(\cdot) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 是以  $\lambda$  为参数的矩阵函数,  $\lambda \in J$ ,  $J \subset \mathbb{R}$ . 若上述方程 (1) 存在非平凡解  $x \neq 0$ , 则  $\lambda$  称作  $T(\cdot)$  的特征值,  $x$  称为相应于特征值  $\lambda$  的特征向量.

### 1.2 NLRKS

若  $\sigma$  不是  $T(\cdot)$  的特征值, 则  $T(\sigma)$  非奇异, 非线性

特征值问题 (1) 与如下求解问题等价

$$T(\sigma)^{-1}T(\lambda)x = 0, \quad (2)$$

记  $A(\lambda) := T(\sigma)^{-1}T(\lambda)$ , 要使式 (2) 有非平凡解, 需  $A(\lambda)$  奇异, 即  $A(\lambda)$  至少有一个特征值为 0, 设  $\text{mineig}$  表示取模最小特征值, 则问题转化为求  $\lambda$  使得

$$\text{mineig}(A(\lambda)) = 0,$$

用割线法对  $\text{mineig}(A(\lambda))$  求根, 得到迭代式

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{\theta_k}{1 - \theta_k}(\lambda_k - \sigma), \quad (3)$$

其中  $\theta_k = \text{mineig}(T(\sigma)^{-1}T(\lambda_k))$ . 具体算法见文献[14].

## 1.3 NLAM

基于残量逆迭代的思想, NLAM 中采用  $\hat{v} = x - T(\sigma)^{-1}T(\mu)x$  来扩充正交基  $V$ . 这里  $\sigma$  是靠近目标特征值的位移,  $\mu$  是 Ritz 值,  $x$  是 Ritz 向量. 由于 Arnoldi 类方法中新的搜索方向要与  $V$  作正交化, 而 Ritz 向量  $x$  已经包含在搜索子空间中, 只需选取  $v = T(\sigma)^{-1}T(\mu)x$  作为新的搜索方向. 具体算法见文献[15].

## 2 RNLRKS 和 INLAM

### 2.1 RNLRKS

#### 2.1.1 精化投影法

在一般的投影方法中 Ritz 对被用来作为特征对的近似, 但有时存在 Ritz 值收敛, Ritz 向量却不收敛, 为此, 贾忠孝在文献[17]中提出了精化的投影方法, 精化方法保留 Ritz 值, 以精化向量替代 Ritz 向量作为特征向量的近似. 对于投影子空间  $K$ , 近似特征值  $\tilde{\lambda}$  精

收稿日期: 2010-09-17

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10961010)

\* 通信作者: lzlu@xmu.edu.cn

化投影方法求满足

$$\| (A - \tilde{\lambda}) \tilde{u} \| = \min_{u \in K, \|u\|=1} \| (A - \tilde{\lambda}) u \| \quad (4)$$

的  $\tilde{u}$  作为与  $\tilde{\lambda}$  相应的近似特征向量. 称  $\tilde{u}$  为  $A$  在子空间  $K$  上与  $\tilde{\lambda}$  相应的精化向量. 对指定的求解子空间  $K$ , 最小二乘问题(4) 可通过奇异值分解求得. 我们将上述概念推广到非线性情形, 定义

$$\tilde{u} = \arg \min_{u \in K, \|u\|=1} \| (T\lambda) u \|^2$$

为子空间  $K$  上与  $\tilde{\lambda}$  相应的精化向量.

### 2.1.2 压缩技术

在用迭代投影法求解特征值问题的过程中, 随着迭代进行, 投影子空间扩大, 部分 Ritz 值收敛, 这时需要进行压缩处理<sup>[18]</sup>. 考虑以下 2 种压缩技术:

Lock: 如果 Ritz 值已经收敛且是我们需要的特征值, 可以通过将相应的特征向量加入投影子空间来避免算法进行下去重复收敛到已经求出的特征值.

Purge: 若有 Ritz 值收敛, 为避免投影子空间增长过大, 通常将我们不感兴趣的方向从子空间中除去.

### 2.1.3 RNLRKS

算法 1(RNLRKS)

- 1) 选择初始向量  $V = (v_1)$ ,  $\|v_1\| = 1$ , 和  $\lambda_0, j = 1$ ;
- 2) 设  $h_j = 0; s = e_j; x = v_j$ ;
- 3) 计算  $r = T(\lambda)^{-1} T(\lambda) x, k_j = V_j^H r$ ;
- 4) 当  $\|k_j\| > \text{ResTol}$  时, 循环
  - (i) 正交化  $r = r - V k_j$ ,
  - (ii)  $h_j = h_j + k_j s_j^{-1}$ ,
  - (iii)  $\theta = \text{mineig} H_{j,j}$ , 相应的特征向量  $s$ ,
  - (iv)  $x = V_j s$ ,
  - (v)  $\lambda = \lambda + \frac{\theta}{1 - \theta} (\lambda - \theta)$ ,
  - (vi)  $H_{j,j} = \frac{1}{1 - \theta} H_{j,j} - \frac{\theta}{1 - \theta} I$ ,
  - (vii)  $r = T(\lambda)^{-1} T(\lambda) x, k_j = V_j^H r$ ;
- 5) 奇异值分解:  $\text{SVD}(T(\lambda) V_j), s$  为最小奇异值对应的右奇异向量;
- 6)  $x = V_j s$ ;
- 7)  $r = T(\lambda)^{-1} T(\lambda) x$ ;
- 8) 正交化  $r = r - V_j V_j^H r$ ;
- 9)  $h_{j+1,j} = \|r\|$ ;
- 10) 若  $\|h_{j+1,j} s_j\| > \text{EigTol}$ , 执行  $v_{j+1} = r/h_{j+1,j}, j = j + 1$ , 转 2);
- 11) 得到特征对  $\lambda = \lambda, x = x$ ;

12) Lock and purge  $H_{j,j}$ , 更新  $j$  和  $V_j$ ;

13) 若要寻找更多的特征值, 选择  $\theta, s$ , 转 4)

(iv).

由前面的分析可知, 在 NLRKS 算法中 Arnoldi 递推关系式只是近似成立, 因此随着迭代的进行必须进行压缩, 一旦在算法 1 中第 11 步得到收敛的特征值, 除了下一个近似特征向量的方向保留外, 所有没有被锁定的方向都应从子空间中除去. 假设经过  $j$  步的迭代, 所有要得到的特征值中已经有  $m$  个特征值被锁定, Arnoldi 递推关系成立

$$A(\lambda) V_j Z = V_j H_{j,j} Z + v_{j+1} (h_{j+1,j} e_j^T Z) = V_j \begin{bmatrix} I_{m,m} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} q \\ 0 & \theta \end{bmatrix} + h_{j+1,j} v_{j+1,j} (e_j^T Z) = V_j \begin{bmatrix} I_{m,m} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} q \\ 0 & \theta \end{bmatrix} + (h_{j+1,j} q_{j-m}) v_{j+1,j} e_j^T, \quad (5)$$

这里

$$H_{j,j} = \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} \\ 0 & H \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$T_{m,m}$  是经过压缩后的上三角阵,  $H$  是  $j - m$  阶的上 Hessenberg 阵. 若  $\theta = \text{mineig} H$  是下一个近似特征值,

$H q = \theta q, \|q\| = 1$ , 令  $Z = \begin{bmatrix} I_{m,m} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$ , 有

$$A(\lambda) V_j Z = V_j H_{j,j} Z + v_{j+1} (h_{j+1,j} e_j^T Z) = V_j \begin{bmatrix} I_{m,m} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} q \\ 0 & \theta \end{bmatrix} + h_{j+1,j} v_{j+1,j} (e_j^T Z) = V_j \begin{bmatrix} I_{m,m} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} q \\ 0 & \theta \end{bmatrix} + (h_{j+1,j} q_{j-m}) v_{j+1,j} e_j^T, \quad (7)$$

上式中  $q_{j-m}$  表示  $q$  的最后一个元素. 令

$$V_{m+2} = (V_j Z \quad v_{j+1}), \quad H_{m+2,m+1} = \begin{bmatrix} T_{m,m} & G_{m,j-m} q \\ 0 & \theta \\ 0 & h_{j+1,j} q_{j-m} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

则迭代可继续进行, 且  $j$  更新为  $j = m + 2$ .

定理 1 考虑  $T(\cdot) \in C^{n \times n}$  在  $J \subset \mathbb{R}$  上的特征值问题. 设  $T(\cdot)$  连续可微,  $(\lambda, x)$  为  $T(\cdot)$  的一个特征对,  $\|x\| = 1, (\mu, \tilde{u})$  为相应的投影子空间  $K$  上的 Ritz 值和精化向量, 则有(i)

$$\| T(\mu) \tilde{u} \| \leq \frac{\| T(\mu) \| \sin \angle(x, K) + C | \mu - \lambda |}{\sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)}}, \quad (9)$$

如果  $T(\lambda)$  有谱分解:  $T(\lambda) = X_1 L_1 Y_1^H + X_2 L_2 Y_2^H$ , 并且

$\lambda(L_1) = 0, \lambda(L_1) \cap \lambda(L_2) = f$ , 这里  $\lambda(\cdot)$  表示取矩阵特征值的集合,  $X_1$  和  $Y_2$  为列规范正交矩阵, 记  $U = \text{span}\{X_1\}$ , 则有(ii)

$$\sin \angle(\tilde{u}, U) \leq \|L_2^{-1}\| (\|T(\mu)\| \sin \angle(x, K) + C(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)}) |\mu - \lambda| / (1 - \sin^2 \angle(x, K))^{-2}), \quad (10)$$

其中  $C$  为一个常数.

证明 (i) 由  $T(\cdot)$  连续可微知,  $\exists t(i, j), 0 \leq t(i, j) \leq 1, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得

$$T(\mu) = T(\lambda) + (\mu - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda)), \\ T(\mu)x = T(\lambda)x + (\mu - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda))x = (\mu - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda))x.$$

记  $C = \max_{\tau} \|T'(\tau)\|$ , 有

$$\|T(\mu)x\| = \|(\mu - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda))x\| \leq C|\mu - \lambda|,$$

设  $P$  为  $K$  上的正交投影,  $x$  可以分解为  $x = x_k + x^\perp, x_k = Px, x^\perp = (I - P)x$ , 则

$$\|x^\perp\| = \sin \angle(x, K), \\ \|x_k\| = \sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)},$$

由精化向量的定义可以得到

$$\|T(\mu)\tilde{u}\| \leq \|x_k\|^{-1} \|T(\mu)x_k\| = \|x_k\|^{-1} \|T(\mu)x - T(\mu)x^\perp\| \leq \frac{\|T(\mu)\| \sin \angle(x, K) + C|\mu - \lambda|}{\sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)}}.$$

(ii) 记  $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$  由谱分解的定义知  $Y^H X = I, Y^H A X = \text{diag}(L_1, L_2), \sin \angle(\tilde{u}, U) = \|Y_2^H \tilde{u}\|$ ,

记  $r = T(\mu)\tilde{u}$ , 则

$$Y_2^H r = Y_2^H (T(\lambda) + (\mu - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda)))\tilde{u} = L_2 Y_2^H \tilde{u} + (\mu - \lambda) Y_2^H T'(\lambda + t(i, j)(\mu - \lambda))\tilde{u},$$

从而得到

$$\sin \angle(\tilde{u}, U) \leq \|L_2^{-1}\| (\|r\| + C|\mu - \lambda|) \leq \|L_2^{-1}\| (\|T(\mu)\| \sin \angle(x, K) + C(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)}) |\mu - \lambda| / \sqrt{1 - \sin^2 \angle(x, K)}).$$

定理 1 表明, 如果  $x \in K$ , 但是  $|\mu - \lambda|$  较大时, 精化向量可能不是特征向量的较好的近似, 因此算法中应考虑在算法的开始迭代步, 投影子空间较小时, 采用精化向量来进行子空间扩展.

## 2.2 INLAM

在 NLAM 算法中, 利用  $\|q_k\| \leq \eta \|r_k - T(\sigma)v_{k-1}\|$  来得到新的搜索方向扩充子空间, 可看作求解一个预

条件系统, 并不需要精确求解. 在此, 我们考虑用一个内层迭代来求解  $T(\sigma)v = r$ , 寻求方程的近似解, 使内迭代的残量  $q^k = r^k - T(\sigma)v^k$  满足指定的允许误差界. 设  $v_k = v_{k-1} + d_k$ , 这时  $q^k = T(\sigma)d_k - (r_k - T(\sigma)v_{k-1})$ , 只需近似求解

$$T(\sigma)d_k = r_k - T(\sigma)v_{k-1}, \quad (11)$$

这里, 内迭代的停止准则设为

$$\|q^k\| < \eta \|r_k - T(\sigma)v_{k-1}\|, \quad (12)$$

这里  $\eta$  为指定的误差界参数.

算法 2(INLAM)

1) 给定初始位移  $\sigma$  和初始标准向量  $v_1$ , 子空间维数  $j = 1$ ;

2) 对  $T(\sigma)$  作不完全 LU 分解;

3) 对  $m = 1, 2, \dots, \text{EigCount}$  循环

(i) 求解投影问题  $T_V(\mu)y := V^H T(\mu) V y = 0$ , 得到目标特征对  $(\mu, y)$ ,

(ii) 计算 Ritz 向量  $u = V y$  和残量  $r_k = T(\mu)u$ ,

(iii) 判断, 若  $\|r_k\| / \|u\| < \varepsilon$  执行

- 得到第  $m$  个特征对  $\lambda_m = \mu, x_m = u$ , 并存储特征向量  $X = (X x_m)$ ,

- 若  $m = \text{EigCount}$  停止,

- 若  $\|r_k\| / \|r_{k-1}\| > \text{ChangCond}$ , 选择新位移  $\sigma$ , 对  $T(\sigma)$  作不完全 LU 分解,

- 必要时重启,

- 选择  $(\mu, u)$  作为下一个目标特征对近似,

- 计算残量  $r_k = T(\mu)u$ ,

- 若  $j > \text{MaxDimension} + m$ , 则令  $j = m + 1, V = (X u)$ , 对  $V$  正交化, 使  $V^H V = I_j$ , 转到步骤 3), 继续循环,

(iv)  $\tilde{r}_k = r_k - T(\sigma)v_{k-1}$ ,

(v) 求解  $T(\sigma)d_k = \tilde{r}_k$ , 使  $\|T(\sigma)d_k - \tilde{r}_k\| < \eta \|\tilde{r}_k\|$ ,

(vi)  $v_k = v_{k-1} + d_k$ ,

(vii) 正交化, 得到  $v = v_k - V V^H v_k$ ,

(viii)  $V = (V v), j = j + 1$ .

定理 2 考虑  $T(\cdot) \in C^{n \times n}$  在  $J \subset \mathbb{R}$  上的特征值问题. 设  $T(\cdot)$  连续可微,  $(\lambda, x)$  为  $T(\cdot)$  的一个特征对,  $\|x\| = 1, (\mu, u)$  为相应的投影子空间上的 Ritz 对,  $\|u\| = 1, \sigma$  为靠近  $\lambda$  的位移,  $\|T(\sigma)v - T(\mu)u\| \leq \eta$  为允许误差界,  $T(\lambda)$  有谱分解  $T(\lambda) = O \cdot xy^H + XLY^H$ ,  $Y$  为列正交规范矩阵, 则有

$$\sin \angle(v, x) \leq \|L^{-1}\| (\eta + C_1 |\mu - \lambda| + C_2 |\sigma - \lambda|) + \sin \angle(u, x). \quad (13)$$

证明 由  $T(\lambda)$  的谱分解得到  $\sin \angle(v, x) = \|Y^H v\|$ ,  $\sin \angle(u, x) = \|Y^H u\|$ , 设  $r = T(\sigma)v - T(\mu)u$ , 则有

$$Y^H r = Y^H (T(\lambda) + (\alpha - \lambda) T'(\lambda + t(i, j)(\alpha - \lambda))) v - Y^H (T(\lambda) + (\mu - \lambda) T'(\lambda + \tau(i, j)(\mu - \lambda))) u = LY^H v + (\alpha - \lambda) Y^H T'(\lambda + t(i, j)(\alpha - \lambda)) v - LY^H u - (\mu - \lambda) Y^H T'(\lambda + \tau(i, j)(\mu - \lambda)) u.$$

从而

$$Y^H v = L^{-1} Y^H r - (\alpha - \lambda) L^{-1} Y^H T'(\lambda + t(i, j)(\alpha - \lambda)) v + Y^H u + (\mu - \lambda) L^{-1} Y^H T'(\lambda + \tau(i, j)(\mu - \lambda)) u.$$

由  $\|T(\sigma)v - T(\mu)u\| \leq \eta$  可知:  $\|T(\sigma)v\| - \|T(\mu)u\| \leq \eta$ , 得到

$$\|v\| \leq \|T(\sigma)^{-1}\| (\eta + \|T(\mu)u\|).$$

设  $\eta < \text{tol}$ , 记  $C_1 = \max_{\xi \in J} \|T'(\xi)\|$ ,  $C_2 = C_1 \cdot \max_{\mu \in J} \|T(\sigma)^{-1}\| (\text{tol} + \|T(\mu)u\|)$ ,

于是可以得到

$$\sin \angle(v, x) \leq \|L^{-1}\| (\eta + C_1 \mu - \lambda + C_2 \alpha - \lambda) + \sin \angle(v, x).$$

### 3 数值实验

这里给出数值算例对算法进行比较, 程序运行在 Intel(R) Core(TM) 2 Duo CPU, 2.2 GHz, Windows Vista Home Premium 下, 编译环境为 Matlab R2006a.

考虑的非线性特征值问题为  $T(\lambda)x = (\lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0)x = 0$ . 其中  $A_0$  是 Laplace 算子在单位圆上的有限元离散, 由 Matlab 函数 `delsq(numgrid('D', m))` 得到,  $A_1$  是用 Matlab 函数 `sprandsym` 产生的随机稀疏对称矩阵,  $A_2 = I$  为单位阵.

令  $A_0 = \text{delsq}(\text{numgrid}('D', 60))$ , 得到一个 2724 阶的非线性特征值问题. 分别采用 NLRKS 和 RNLRS 求解区间  $[10, 15]$  中的 15 个特征值, 计算结果如图 1 所示. 计算 15 个特征值所用 CPU 时间, NLRKS 为 887 s, RNLRS 为 787 s, 可见经精化处理后提高了求解效率.

用 NLAM 和 INLAM 求解上述问题, 计算  $[0, 1]$  区间的 15 个特征值, 在 INLAM 中, 取  $\eta = 0.8$ . NLAM 在计算过程中需要进行 4 次的 LU 分解, 因此 INLAM 的计算时间远少于 NLAM, 见图 2.

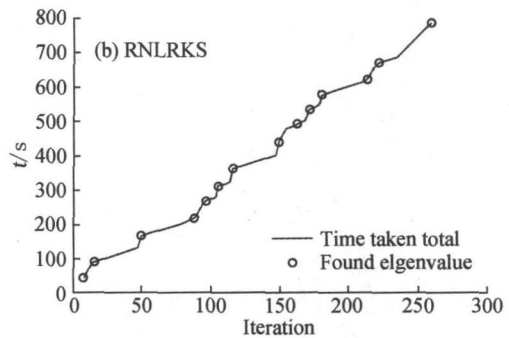
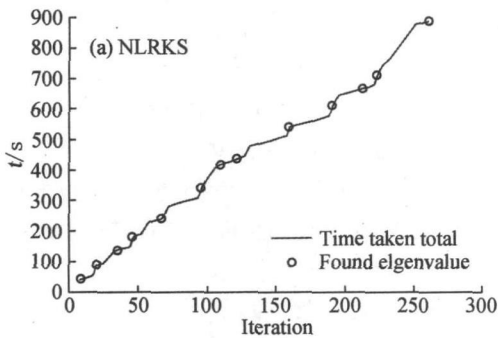


图 1 NLRKS 和 RNLRS 对比(CPU 时间)  
Fig. 1 Comparison of NLRKS and RNLRS (CPU time)

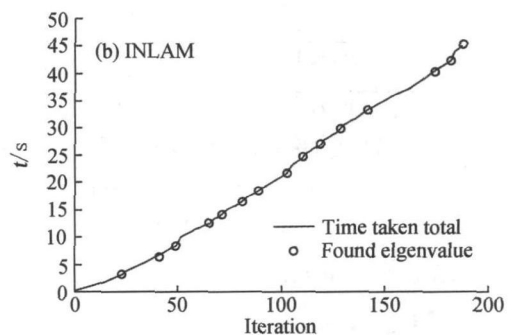
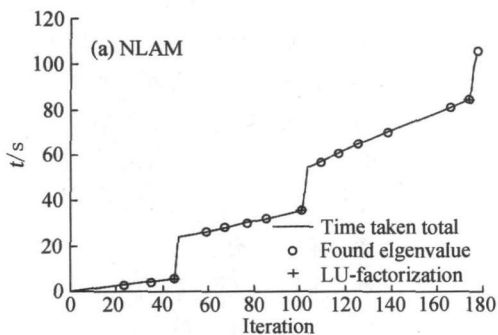


图 2 NLAM 和 INLAM 对比(CPU 时间)  
Fig. 2 Comparison of NLAM and INLAM (CPU time)

## 4 结 论

非线性有理 Krylov 方法和非线性 Arnoldi 方法都是求解非线性特征值问题的迭代投影法, NLAM 通常比 NLRKS 高效, 但 NLRKS 的好处在于不要求明确表示出投影问题, 适用于解决某些应用问题. 本文在 RNLRKS 中用精化向量代替 Ritz 向量, 加快了收敛速度. INLAM 中采用内迭代近似求解预条件系统, 避免用直接法求解, 提高了算法的效率.

### 参考文献:

- [1] Voss H. A rational spectral problem in fluid-solid vibration[J]. *Electr Trans Numer Anal*, 2003, 16: 94-106.
- [2] Planchard J. Eigenfrequencies of a tube bundle placed in a confined fluid[J]. *Comput Meth Appl Mech And Eng*, 1982, 30: 75-93.
- [3] Lee L, Ge L, Li Z, et al. Achievements in ISICs/SAPP collaborations for electromagnetic modeling of accelerators [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2005, 16: 205-209.
- [4] Lee L, Ge L, Li Z, et al. Omega3P: a parallel finite-element eigenmode analysis code for accelerator cavities[R]. Menlo Park, CA: SLAC National Accelerator Center, 2009.
- [5] Parlett B N, Chen H C. Use of indefinite pencils for computing damped natural modes[J]. *Linear Alg Appl*, 1990, 140: 53-88.
- [6] Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems [M]// *Algorithms and Architecture for Advanced Scientific Computing*. Manchester, UK: Manchester University Press, 1992.
- [7] Mehrmann V, Watkins D. Structure preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils[J]. *SIAM J Matrix Anal Applic*, 2001, 22: 1905-1925.
- [8] Voss H. Projection methods for nonlinear sparse eigenvalue problems[R]. TU Hamburg-Harburg: Arbeitsbereich Mathematik, 2005.
- [9] Tisseur F, Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem[J]. *SIAM Rev*, 2001, 43: 234-286.
- [10] Mehrmann V, Voss H. Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods [R]. TU Hamburg-Harburg: Arbeitsbereich Mathematik, 2004.
- [11] Bai Z, Su Y. A second-order Arnoldi method for the solution of the quadratic eigenvalue problem[J]. *SIAM J Matrix Anal Applic*, 2005, 26: 640-659.
- [12] Hochbruck M. A multilevel Jacobi-Davidson method for polynomial PDE eigenvalue problems arising in plasma physics[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2010, 32: 3151-3169.
- [13] Betcke T, Voss H. A Jacobi-Davidson type projection method for nonlinear eigenvalue problems[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2004, 20(3): 363-372.
- [14] Ruhe A. A rational Krylov algorithm for nonlinear matrix eigenvalue problems [J]. *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI*, 2000, 268: 176-180.
- [15] Voss H. An arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2004, 44: 387-401.
- [16] Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1985, 22: 914-923.
- [17] JIA Zhongxiao. Refined iterative algorithms based on Arnoldi's process for large unsymmetric eigenproblems [J]. *Linear Algebra Appl*, 1997, 259: 1-23.
- [18] Lehoucq R B, Sorensen D C. Deflation techniques within an implicitly restarted Arnoldi iteration[J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1996, 17: 789-821.

## Two Projection Methods for Nonlinear Eigenvalue Problems

LI Chang-wei<sup>1</sup>, LU Lin-zhang<sup>2\*</sup>

(1. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** We discussed two projection methods for nonlinear eigenvalue problems, i. e. nonlinear rational Krylov subspace method (NLRKS) and nonlinear Arnoldi method (NLAM). Applied the refined projection technique and inexact preconditioning scheme respectively to the methods, we present the refined rational Krylov subspace method (RNLRKS) and inexact nonlinear Arnoldi method (INLAM). With some numerical examples we demonstrate the performance improvement of the new algorithms.

**Key words:** nonlinear eigenvalue; iterative projection method; Arnoldi method; rational Krylov method