

背向阶梯流谱元法计算中的 Orlanski 型出口边界条件^①

许 传 炬

(厦门大学数学系 厦门 361005)

摘要 讨论谱元法计算中的各种出口边界条件及其对数值模拟的影响. 引入 Orlanski 型出口边界条件在谱元法计算中的实现方法, 并介绍其在二维背向阶梯流数值模拟中的应用. 数值结果显示, 该型出口边界条件比通常的 Dirichlet 型和 Neumann 型边界条件对背向阶梯流计算结果的干扰更小.

关键词 背向阶梯流, 出口边界条件, 谱元法

中国图书分类号 O 175.2, O 357.1

在计算流体动力学中, 由于计算手段和计算方法的局限, 通常必须考虑有限的计算区域, 从而引入人工边界, 这类边界通常称为开放边界(Open Boundary). 背向阶梯流中的出口边界就是一例. 本文主要研究几种常见的出口边界条件(Outflow boundary conditions, 简写成 OBCs)对背向阶梯流谱元法数值模拟的影响, 在此基础上引入一种新型的 OBCs(对谱方法计算来说), 通过与标准的 OBCs 进行比较, 证明这种 OBCs 能有效减小出口边界对数值计算的影响, 因此产生更精确的模拟结果.

最近关于 OBCs 的研究很多. 这些研究主要集中在差分法和有限元的数值计算中^[1~6], 有关评论可参考文献^[7,8]. 目前在差分法计算中心中流行着一种所谓 Orlanski 型的 OBCs, 这种 OBCs 在一些问题(如 Poiseuille-Benard 流)的计算中证明具有干扰小的优点^[5]. 由于没有有力的理论解释这一现象, 目前的情况仍是多种 OBCs 共存的局面. 另外由于不同的 OBCs 适合不同的数值方法, 使得试图找到一种普遍适用的 OBCs 的努力变得更为困难. 因此流体计算中基本上仍然采用针对特定问题特定算法寻找特定 OBCs 的办法.

本文将考虑下面三种 OBCs:

1) Dirichlet 型, $\varphi = 0$;

2) Neumann 型, $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0$;

3) Orlanski 型, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0$.

这里 φ 代表被涉量, V 为一待定数, \mathbf{n} 为出中边界上的单位外法向量(黑体字母表示向量函数或向量). 我们分析这些 OBCs 在谱元法数值计算中的实现方法以及对数值结果的干扰程度,

虽然仅对二维背向阶梯流进行讨论,但我们相信本文的分析将同样适用于其它具开放边界的流体计算问题.

1 控制方程和数值方法

1.1 控制方程

考虑二维无量纲化的粘性不可压缩方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 和 p 分别是无量纲速度和压力, 它们的参考尺度分别是平均流速 V 和 $\rho_0 V^2$, 这里 ρ_0 为流体密度. 空间和时间变量的参考尺度分别是阶梯高度 h 和阶梯高度与平均流速之比 h/V . $Re = 2hV/\nu$ 是 Reynolds 数, 这里 ν 是流体粘性系数.

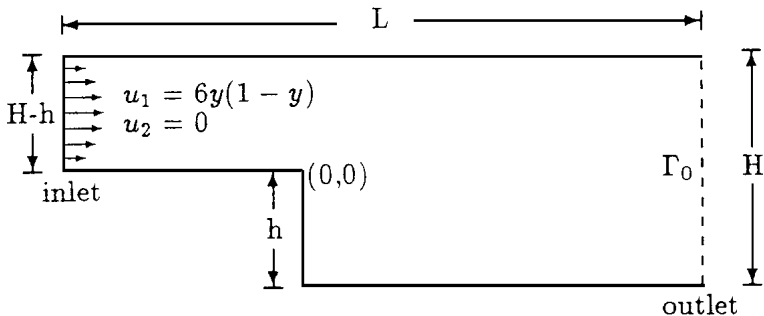


图 1 背向阶梯流计算区域

Fig. 1 Backward-facing step computational domain

计算区域和边界条件如图 1 所示. 为计算方便, 选取 $H = 2h$.

初始条件取与入口条件相容的抛物型函数 $\frac{3}{4}(1 - y^2)$. 只要计算时间足够长, 初始条件的影响即可被忽略.

1.2 出口边界 Γ_0 上的边界条件

1) OBC1: $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$, 这里 $\mathbf{u}^0 = \frac{3}{4}(-y^2)$.

OBC1 是标准的 Dirichlet 型边界条件. 从数值计算角度看, OBC1 是一种较不精确的出口边界条件, 因为这种 OBCs 通常不能正确描述出口处的流体运动特性, 而且会引入数值边界层流^[8].

$$\begin{aligned} 2) \text{OBC2: } & \frac{1}{Re} \frac{\partial u_1}{\partial n} - p = 0, \\ & \frac{1}{Re} \frac{\partial u_2}{\partial n} - p = 0, \end{aligned}$$

OBC2 是一类 Neumann 型边界条件. 这个 OBCs 以弱形式出现, 产生的数值边界层流较弱. 许多数值试验表明它比 OBC1 精确, 因此受到工程师的偏好. 但使用 OBC2 产生的离散梯度矩阵与离散度矩阵不具有互为对称性, 压力系统的对称性也随之丢失. 虽然不对称性只存在于出中处及其附近区域, 但迭代算法的效率将因此下降.

3) OBC3: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$.

这种 OBCs 被称为 Orlanski 型边界条件^[5,9], 最近在差分类数值解法中很流行, 因为数值试验表明它比其它类型的 OBCs 产生的干扰小. 虽然尚无严格的理论支持, 但粗略地看, 这种 OBCs 可看做一类在特征线上随时间调整的 Dirichlet 型边界条件. 基于这样的看法, 我们尝试利用特征线法把这一 OBCs 应用到背向阶梯流的谱元法计算中. 具体处理过程如下: 在第 n 步时间迭代结束后, 首先用特征线法求解方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$$

求得速度场在出口边界上的值作为下一步 (第 $n+1$ 步) 计算的 OBCs, 此时问题就归结为 OBC1 的处理. 所不同的是, 这里出口处的速度值随时间迭代进行调整.

1.3 时间格式

我们利用半隐格式处理时间离散, 即显示处理对流项 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, 隐式处理扩散项和压力梯度项. 这种处理方式比较适合中等雷诺数流体的数值计算—尤其是在使用谱方法时^[10-12]. 它的主要优点是: 在适当放松稳定性限制的同时, 保持了时间半离散方程的对称性.

1.4 谱元法空间离散

本文使用的谱方法是基于 Legendre-Collocation 网络上的一类伪谱法^[13,14]即谱元离散问题(4)中的积分由基于 Gauss-Lobatto 型的二次公式逼近. 每个区域元上有 $(N+1)^2$ 个速度节点和 $(N-1)^2$ 个压力节点, 这里 N 是区域元的阶数—意味着在区域元上用来逼近速度的多项式阶数是 N , 用来逼近压力的多项式阶数是 $N-2$. 速度节点定位在 Gauss-Lobatto-Collocation 点上, 压力节点定位在 Gauss-Collocation 点上, 因此, 在各区域单元的边界上, 速度场是连续的, 压力场却不连续.

注 1 当 $\Gamma_D = \partial\Omega$ 时需要附加约束条件以使压力 p_N 有确定解. 本文使用 $\int_{\Omega} p_N dx dy = 0$ 作为约束条件.

2 数值结果

所有的数值模拟均由谱元法计算流体软件 SECF 完成. SECF 是作者根据 MIT 的同类型软件 NEKTON^[15,16] 的设计思想编写而成的, 可进行粘性流、非粘性流以及粘性/非粘性耦合流的三维数值计算. 在 SECF 中, 有两种方法得到收敛解. 一种是将计算区域剖分成足够小的区域元, 而每个区域元的阶数 N 保持不变. 这种方式类似于经典的有限元法, 通过逐渐减少区域元的尺寸来达到收敛的目的; 另一种方法

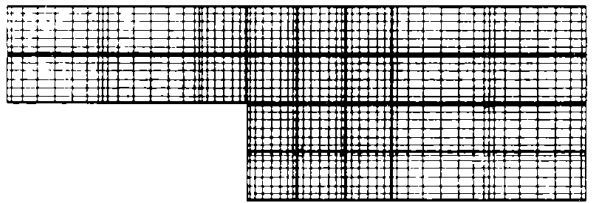


图 2 谱元网格, 显示区域剖分及其 Gauss-Lobatto 节点 (即速度节点) 分布

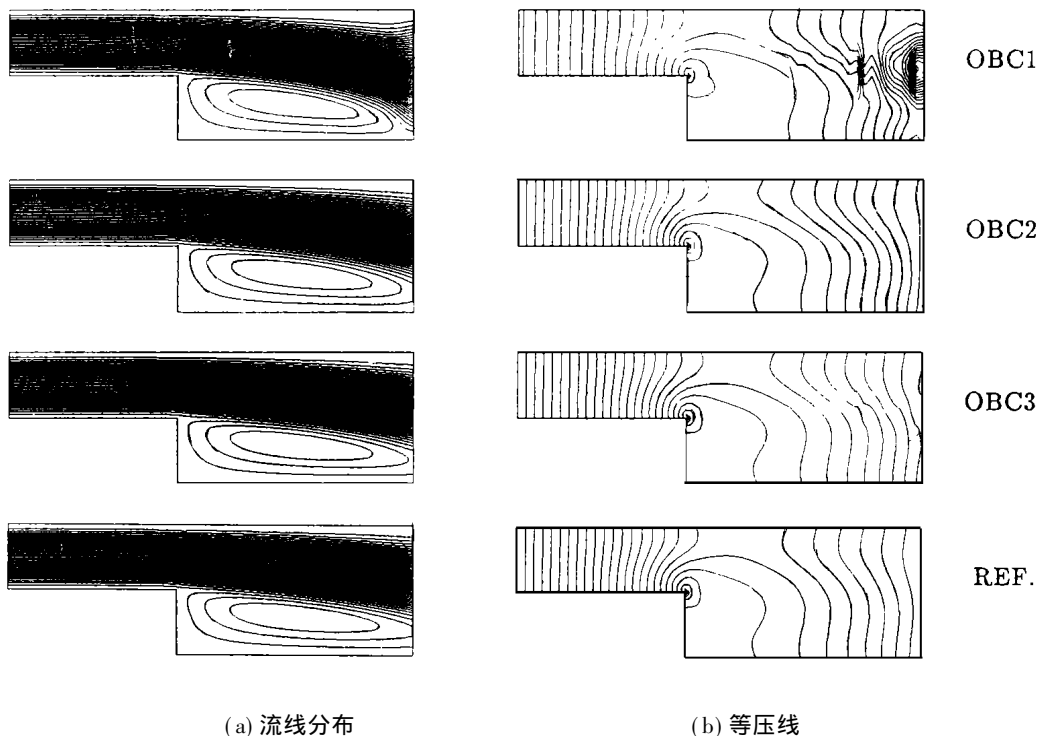
Fig. 2 Spectral element mesh, only Gauss-Lobatto nodes (i. e. velocity nodes) are shown

是保持区域剖分不变, 即固定区域元的个数, 通过抬高区域元的阶数 N 来增加数值解的精度. 后一种方法实际上是谱方法的主要特点之一. 根据 Patera 和 Maday^[11,13] 等人的理论, 对于充分滑的解, 数值解的误差可随 N 的增加呈指数衰减. SECF 采用 Uzawa 方法求解谱元离散生成的代数方程, 其基本思想是将关于 \mathbf{u}, p 的鞍点问题分解成两个可分别求解的速度系统和压力系统, 再分别用预条件内—外钳式共轭梯度法求解. 这一方法的优点是速度、压力独立求

解,已被证明^[10-12,15]是一种非常有效的方法.

鉴于本文的目的,我们只考虑 $Re=200$ 时的情形.图 2 显示计算网格,其中的区域长度为 6,网格中有 26 个区域元,区域元的阶数 N 为 8.为清楚起见,图 2 上只显示 Gauss-Lobatto-Collocation 点,网格图中的标记点(打 * 号)是特定的数据记录点,它们对应的网格中的坐标分别是 $(0.5, -0.5), (2.5, 0)$.

图 3 显示利用各种 OBCs 计算得到的结果,分别显示流线和等压线,其中的参考图(Reference)是在长度为 16(即 $L=16$)的管道中种用 OBC1 计算所得数据的前段部分显示.一般相信 OBCs 的影响仅限于出口处的小区域,因此可以认为参考图代表精确解.所有的结果都是在 $t=50$ 时刻记录下来的.由 OBC3 获得的结果与参考值吻合,而由 OBC1 计算的结果出入很明显.为了更详细地比较三种 OBCs 的影响程度,我们在图 4 画出速度和压力沿区域横向中轴 $y=0$ 的分布,显示各种 OBCs 的影响深度.OBC3 对应的曲线与参考曲线误差较小,而 OBC1 和 OBC2 产生的误差较大.需要指出的是关于压力的变化曲线中,由于不同的 OBCs 对应不同的压力约束条件,它们之间可能相差某一常数,这是图中各压力曲线存在上下平移的原因.图 5 描绘各物理量在出口 $x=3.5$ 处沿纵向的分布,显示各种 OBCs 在出口处的影响幅度.由图 5 可进一步看到 OBC3 比 OBC1 和 OBC2 更加精确.



(a) 流线分布

(b) 等压线

图 3 $Re=200$ 时各种 OBCs 得到的 $t=50$ 时的流体结构与参考图的比较

(a) 流线分布, (b) 等压线

Fig. 3 Comparison of the fluid structure obtained with various OBCs and with the reference at $t=50$ with $Re=200$

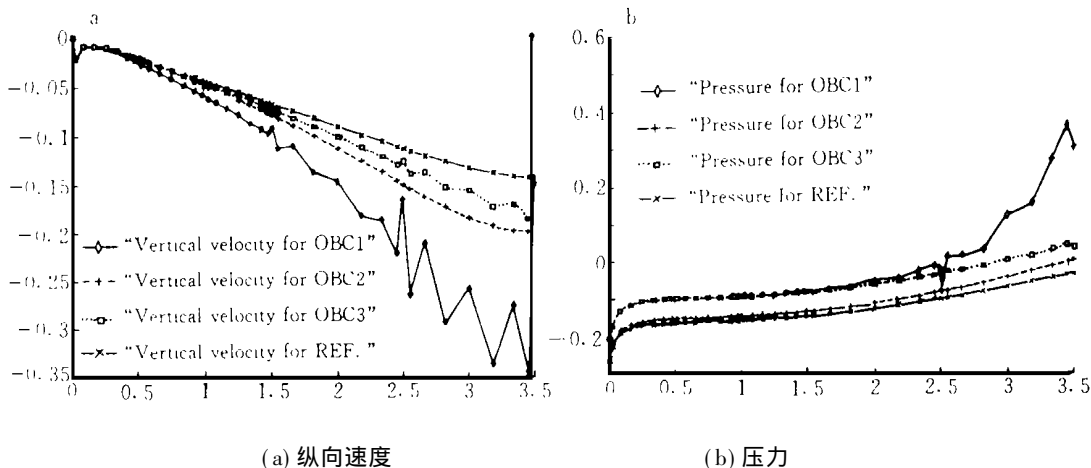


图 4 不同 OBCs 对应的(a) 纵向速度和(b) 压力沿横向中轴 $y = 0$ 的变化情况

Fig. 4 A plot of (a) the vertical velocity and (b) pressure along axis $y = 0$ obtained respectively by various OBCs

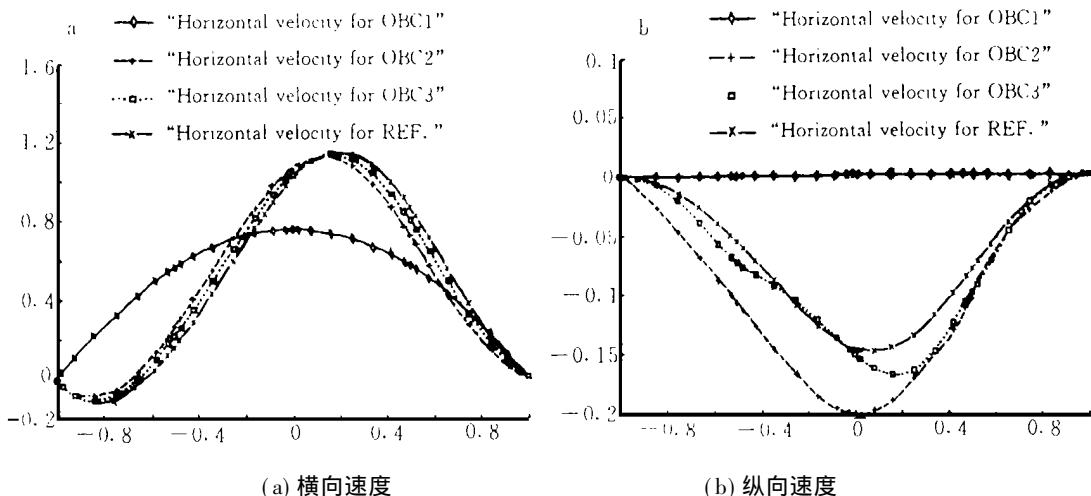


图 5 与图 4 同样的物理量在出口处 ($x = 3.5$) 沿纵向的分布

Fig. 5 OBCs effect upon same variables as Fig. 4 at outlet

3 结 论

我们利用谱元法数值计算了背向阶梯流, 详细比较了多种出口边界条件对数值结果的影响. 通过引进特征线法成功地将非标准的边界条件应用于谱元法计算. 计算显示 Orlandi 型出口条件能更精确地模拟流体在出口处的结构. Neumann 型出口条件也能产生较好的结果, 但由于采用 Neumann 型出口条件产生的代数方程性质较差, 所需计算时间较长, 因此我们相信对一般的工程应用, Orlandi 型边界条件是较理想的一类出口边界条件.

参 考 文 献

- 1 Griffiths D F. The no boundary condition outflow boundary condition. *Int. J. numer. methods fluids*, 1997, 24: 393 ~ 411
- 2 Johansson B C V. Boundary conditions for open boundaries for the boundaries for the incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 1993, 105: 233 ~ 251
- 3 Kobayashi M H, Pereira J C F, Sousa J M M. Comparison of several open boundary numerical treatments for laminar recirculating flows. *Int. J. numer. methods fluids*, 1993, 16: 403 ~ 419
- 4 Nordstrom J. Accurate solutions of the Navier–Stokes equations despite unknown outflow boundary data. *J. Comput. Phys.*, 1995, 120: 184 ~ 205
- 5 Nicolas X, Traore P, Mojtabi A et al. Augmented Lagrangian method and open boundary conditions in 2D simulation of Poiseuille–Benard channel flow. *Int. J. Numer. methods fluids*, 1997, 25: 265 ~ 283
- 6 Papanastasiou T C, Malamataris M., Ellwood K. A new outflow boundary condition. *Int. J. numer. methods fluids*, 1992, 14: 587 ~ 608
- 7 Bottaro A. Note on open boundary conditions for elliptic flows. *Numer. Heat Transfer B*, 1990, 18: 243 ~ 256
- 8 Sani R L, Gresho P M. Resume and remarks on the open boundary condition minisymposium. *Int. J. numer. methods fluids*, 1994, 18: 983 ~ 1 008
- 9 Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *J. Comput. Phys.*, 1976, 21: 251 ~ 269
- 10 Maday Y, Meiron D, Patera A T et al. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: Application to spectral element discretion. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1993, 14(2): 310
- 11 Maday Y, Patera A T. Spectral element methods for the Navier–Stokes equations. In: A. K. Noor eds *State of the art surveys in computational mechanics*. New York: ASME, 1998: 71
- 12 Xu C J, Maday Y. A spectral element method for 2D Euler equations; applications to flow simulations. *IMA J. Comput. Appl. Math.*, 1998, 91(1): 63 ~ 85
- 13 Bernardi C, Maday Y. *Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques*. Paris: Springer–Verlag, 1992
- 14 Patera A T. A spectral element method for fluid dynamics; laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 1984, 54: 468 ~ 488
- 15 NEKTON User s Guide, Version 2. 7. Cambridge, MA: Nektonics Inc., 1991
- 16 Chadraborti M, Subbiah S. A spectral element solution to the backward-facing step problem using NEK–TON. IN: Blackwell B, Pepper D W, eds. *Proceeding Winter Annual Meeting of the ASME*. Anaheim, 1992: 59

Orlanski-type Open Boundary Condition on Numerical Simulation of Backward-Facing Step Flow via Spectral Element Methods

Xu Chuanju

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract

The purpose of this paper is to compare the effect of different open boundary conditions (OBCs) based upon simulation results of backward-facing step flow. An Orlanski-type OBCs is introduced in the context of spectral element method, for which a new treatment technique is detailed. The computation are carried out for $Re = 200$. Numerical results show that the Orlanski-type OBCs have better behavior as Dirichlet and compared to the other classic OBCs, such as Dirichlet and Neumann-type OBCs.

Key words

Backward-facing step flow, Open boundary conditions, Spectral element methods