第 33 卷 第 6 期
1999 年 6 月

西 安 交 通 大 学 学 报
JOURNAL OF XI′AN JIAOTONG UNIVERSITY

Vol. 33 №6
Jun. 1999

Navier-Stokes 方程的最佳非线性谱 Galerkin 算法

何银年[1], 许传炬[2]
(1. 西安交通大学, 710049, 西安; 2. 厦门大学)

摘要: 提出了求解二维非定常 Navier-Stokes 方程的最佳非线性谱 Galerkin 算法, 分析了近似解的一致收敛速度. 和标准的谱 Galerkin 算法与非线性谱 Galerkin 算法相比, 该算法具有节省计算量的优点.

关键词: Navier-Stokes 方程; 非线性 Galerkin 算法; 谱函数
中国图书资料分类法分类号: O242.21; O357.1

Nonlinear Spectral Galerkin Algorithm for the Navier-Stokes Equations

He Yinnian[1], *Xu Chuanju*[2]
(1. Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China; 2. Xiamen University)

Abstract: Presented is an optimum nonlinear spectral Galerkin algorithm for solving the nonstationary Navier-Stokes equations in two dimensions. The convergence rate of the numerical solution is analyzed. The present approach saves a large amount of computational time.

Keywords: *Navier-Stokes equations; nonlinear Galerkin algorithm; spectral function*

对于非定常 Navier-Stokes 方程, 人们感兴趣的是当时间 $t\to\infty$时解的渐近行为. 当物理上的无量纲参数 Reynolds 数很小时, 非定常解趋向于定常解; 在大 Reynolds 数时, 非定常解表现为湍流, 解的渐近行为表现在一个全局吸引子的结构上. 为了研究非定常解的渐近行为, 人们需要选择合适的计算格式进行数值模拟. 非线性 Galerkin 方法是根据动力系统和惯性流形的观点而设计的一种新的数值算法, 有别于古典的 Galerkin 方法. 非线性 Galerkin 方法的主要特点是将求解未知量分解为大涡分量和小涡分量, 并强调了小涡分量和大涡分量的相互作用规律. 因此, 不同的相互近似作用规律导致不同的非线性 Galerkin 方法[1~3]. 另外, 文献[2, 3]给出了非线性 Galerkin 算法的收敛速度, 然而这种收敛速度的估计是局部的, 即在某有限时刻之后给出的.

本文对于二维非定常 N-S 方程解的小涡分量和大涡分量给出了一种新的近似相互作用规律, 导出了最佳非线性谱 Galerkin 算法. 此外, 我们给出了任何时间区间上该算法的收敛速度. 和古典的谱 Galerkin 方法相比, 该算法可节省可观的计算量.

1 Navier-Stokes 方程

考虑二维非定常 Navier-Stokes 方程的初边值问题

收稿日期: 1998-07-23. 作者简介: 何银年, 男, 1953 年生, 理学院科学计算与应用软件系, 副教授.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19671067); 西安交通大学科研基金资助.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$
(\mathrm{N-S})\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\lambda\Delta \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} & \\ & \forall(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times R^{+}\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 & \forall(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times R^{+}\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) & \forall(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\mid_{\Gamma}=0 & \text{或满足周期性边界条件}\end{cases}
$$

其中 $\Omega\subset R^2$ 为有界区域; $\Gamma=\partial\Omega$; $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 是空间变量; t 为时间变量; $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 是速度向量; $p(\boldsymbol{x},t)$ 是压力; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 是体力密度; $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ 为初始速度向量; $\lambda=Re^{-1}$, Re 为雷诺数.

众所周知[4,5], 上述初边值问题可以归结为某一Hilbert 空间 $H\subset L^2(\Omega)^2$ 上的抽象初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\lambda A\boldsymbol{u}+B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0 \qquad (2)$$

这里, Stokes 算子 A 是 H 中的无界正定自共轭闭算子, A 的定义域 $D(A)$ 在 H 中稠密, A 的逆算子 A^{-1} 在 H 中是紧的, 因此 A 的特征函数系 $\boldsymbol{w}_j$ 构成 H 的完全标准正交基

$$A\boldsymbol{w}_j=\lambda_j\boldsymbol{w}_j,\ 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\ \lambda_j\to\infty \quad (\text{当 } j\to\infty \text{ 时})$$

此外, $B(\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V$ 到 V' 上的双线性算子, $V=D(A^{1/2})$. 我们用

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x,\ ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))=(A^{1/2}\boldsymbol{u},A^{1/2}\boldsymbol{v})$$

分别表示 H 和 V 中的内积, 相应的范数为

$$\|\boldsymbol{u}\|_H=|\boldsymbol{u}|=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^{1/2}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_V=((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}))^{1/2}=\|\boldsymbol{u}\|$$

根据双线算子 $B(\cdot,\cdot)$, 我们定义三线性形式

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\langle B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}\rangle_{V',V}\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$$

由文献[2~4], 我们得知 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $B(\cdot,\cdot)$ 满足下列性质

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V \qquad (3)$$

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant c_0|\boldsymbol{u}|^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|\cdot|\boldsymbol{w}|^{1/2}\|\boldsymbol{w}\|^{1/2}\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant c_1\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\||\boldsymbol{w}|(1+\lg\frac{|A\boldsymbol{u}|^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\lambda_1})^{1/2}\quad\forall\boldsymbol{u}\in D(A),\boldsymbol{v}\in V,\boldsymbol{w}\in H\\&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant c_1|\boldsymbol{u}|\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|(1+\lg\frac{|A\boldsymbol{w}|^2}{\|\boldsymbol{w}\|^2\lambda_1})^{1/2}\quad\forall\boldsymbol{u}\in H,\boldsymbol{v}\in V,\boldsymbol{w}\in D(A)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant c_2|\boldsymbol{u}|^{1/2}\|\boldsymbol{u}\|^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}|A\boldsymbol{v}|^{1/2}\quad\forall\boldsymbol{u}\in V,\boldsymbol{v}\in D(A)\\&|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant c_2|\boldsymbol{u}|^{1/2}|A\boldsymbol{u}|^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|\quad\forall\boldsymbol{u}\in D(A),\boldsymbol{v}\in V\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

对于式(1)、(2), 有下列的存在唯一性结果[4].

定理 1 假定 $\boldsymbol{f}\in L^\infty(R^+;H)$, 则对于 $\boldsymbol{u}_0\in H$, 式(1)、(2)有唯一解 $\boldsymbol{u}\in C(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)$, $\forall T>0$. 此外, 如果 $\boldsymbol{u}_0\in V$, 则 $\boldsymbol{u}\in C(R^+;V)\cap L^2(0,T;D(A))$, $\forall T>0$.

2 最佳非线性 Galerkin 算法

在本文, 我们设 $m=n,N$, P_m 表示 H 到 $H_m=\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m\}$ 上的正交投影算子, $Q_m=I-P_m$, $Q_n^N=P_N-P_n$, 则有

$$P_mA=AP_m,\ Q_mA=AQ_m,\ Q_n^NA=AQ_n^N \qquad (7)$$

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=0\quad\forall\boldsymbol{y}\in H_m,\boldsymbol{z}\in H\setminus H_m \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1|\boldsymbol{u}|^2\leqslant\|\boldsymbol{u}\|^2 &&\forall\boldsymbol{u}\in V\\&\lambda_{m+1}|\boldsymbol{z}|^2\leqslant\|\boldsymbol{z}\|^2 &&\forall\boldsymbol{z}\in V\setminus H_m\\&\|\boldsymbol{y}\|^2\leqslant\lambda_m|\boldsymbol{y}|^2 &&\forall\boldsymbol{y}\in H_m\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

按照上述记号, 古典的 Galerkin 算法在于: 找 $\boldsymbol{u}_N(t)\in H_N$, $\forall t\geqslant0$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_N}{\mathrm{d}t}+\lambda A\boldsymbol{u}_N+P_NB(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{u}_N)=P_N\boldsymbol{f} \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{u}_N(0)=P_N\boldsymbol{u}_0 \qquad (11)$$

类似于定理 1 的结论, 如果 $\boldsymbol{u}_0\in V$, $\boldsymbol{f}\in L^\infty(R^+;H)$, 则式(10)、(11)允许有唯一解 $\boldsymbol{u}_N\in C(R^+;V)\cap L^2(0,T;D(A))$, $\forall T>0$.

根据式(1)、(2)和式(10)、(11)的适定性, 我们假定

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|\leqslant M,\ \|\boldsymbol{u}_N(t)\|\leqslant M\quad\forall t\geqslant0 \qquad (12)$$

其中: $M>0$ 是一个常数. 非线性谱 Galerkin 算法的主要出发点在于分解 $\boldsymbol{u}_N$ 为大涡分量 $\boldsymbol{y}$ 和小涡分量 $\boldsymbol{z}$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_N(t)=\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{z}(t)\\&\boldsymbol{y}(t)\in H_n,\ \boldsymbol{z}(t)\in H_N\setminus H_n\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

然后对 $\boldsymbol{u}_N$ 的方程(10)采取近似, 于是导出不同的数值算法, 按照式(8)、式(9)和式(12), 我们有估计

$$|\boldsymbol{z}|\leqslant\lambda_{n+1}^{-1/2}\|\boldsymbol{z}\|\leqslant\lambda_{n+1}^{-1/2}\|\boldsymbol{u}_N\|\leqslant\lambda_{n+1}^{-1/2}M\quad\forall t\geqslant0 \qquad (14)$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此分解式(13)从物理背景和数值分析上都具有重要的意义, z 的确为小涡分量.

简单的非线性谱 Galerkin 算法在于将式(10)分别投影到有限维空间 H_n 和 $H_N \setminus H_n$ 上, 并舍去某些含小涡分量 z 的三线性项和导数项, 得到如下近似问题[1~3].

找 $\boldsymbol{u}^N(t) = \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{z}(t) \in H_N$, $\boldsymbol{y}(t) \in H_n$, $\boldsymbol{z}(t) \in H_N \setminus H_n$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} + \lambda A\boldsymbol{y} + P_n[B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})] = P_n\boldsymbol{f} \tag{15}$$

$$\lambda A\boldsymbol{z} + Q_n^N B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = Q_n^N\boldsymbol{f} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = P_n\boldsymbol{u}_0 \tag{17}$$

参见文献[2, 3], 存在某一常数 T_0 使得该数值解的收敛速度为: $\forall t \geqslant T_0$

$$|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^N(t)|^2 \leqslant [(1 + \frac{K}{\lambda_{n+1}^{1/2}}) \cdot \int_0^t e^{\int_s^t A_n(r)\mathrm{d}r} B_n(s)\mathrm{d}s + \frac{2}{L_n}] \frac{K L_n^3}{\lambda_{n+1}^3}$$

其中: K 依赖于数据 λ、λ_1 和 $|f|$; $T_0 > 0$ 是一个可确定的常数, 依赖于 $Q_n u(t)$. 此外

$$L_n = 1 + \ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1}, A_n(t) = c(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}^N\|^2)$$

$$B_n(t) = c(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2 L_n^{-2})$$

这里 c 是一般性常数.

在本文, 我们给出如下的最佳非线性谱 Galerkin 算法:

找 $\boldsymbol{u}_N(t) = \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{z}(t) \in H_N$, $\boldsymbol{y}(t) \in H_n$, $\boldsymbol{z}(t) \in H_N \setminus H_n$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} + \lambda A\boldsymbol{y} + P_n B(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = P_n\boldsymbol{f} \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} + \lambda A\boldsymbol{z} + Q_n^N[B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})] = Q_n^N\boldsymbol{f} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = P_n\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{z}(0) = Q_n^N\boldsymbol{u}_0 \tag{20}$$

对于式(18)~(20), 我们可以用时间推进法求解, 即将时间求解区间 $R^+ = [0, \infty)$ 分解为小区间: $[0, t_1]$, …, $[t_{k-1}, t_k]$ …, 以给定 $\boldsymbol{y}(t_{k-1})$ 替换式(19)中的 $\boldsymbol{y}(t)$ 并求解线性方程, 得到 $\boldsymbol{z}(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, 再将 $\boldsymbol{z}(t)$ 代入式(18)求解非线性方程, 得到 $\boldsymbol{y}(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, 于是可近似解出 $\boldsymbol{u}^N(t) = \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{z}(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $\forall k \geqslant 1$.

3 先验估计

注意式(18)~(20)可以写为下列等价问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^N}{\mathrm{d}t} + \lambda A\boldsymbol{u}^N + P_N B(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{u}^N) - Q_n^N B(Q_n^N\boldsymbol{u}^N, Q_n^N\boldsymbol{u}^N) = P_N\boldsymbol{f} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}^N(0) = P_N\boldsymbol{u}_0 \tag{22}$$

式(21)分别在 H、V 中与 $\boldsymbol{u}^N$ 作内积, 利用式(21), 则得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}^N|^2 + \lambda\|\boldsymbol{u}^N\|^2 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^N) \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}^N\|^2 + \lambda|A\boldsymbol{u}^N|^2 + b(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{u}^N, A\boldsymbol{u}^N) - b(Q_n^N\boldsymbol{u}^N, Q_n^N\boldsymbol{u}^N, Q_n^N A\boldsymbol{u}^N) = (\boldsymbol{f}, A\boldsymbol{u}^N) \tag{24}$$

利用式(3)~(6)和 Young 不等式, 我们得到

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^N)| \leqslant \lambda_1^{-1/2}|\boldsymbol{f}|\,\|\boldsymbol{u}^N\| \leqslant \frac{1}{2\lambda\lambda_1}|\boldsymbol{f}|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{u}^N\|^2$$

$$|(\boldsymbol{f}, A\boldsymbol{u}^N)| \leqslant \frac{\lambda}{4}|A\boldsymbol{u}^N|^2 + \lambda^{-1}|\boldsymbol{f}|^2$$

$$|b(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{u}^N, A\boldsymbol{u}^N)| \leqslant \frac{\lambda}{8}|A\boldsymbol{u}^N|^2 + (\frac{4}{\lambda})^3 c_2^4 |\boldsymbol{u}^N|^2\|\boldsymbol{u}^N\|^4$$

$$|b(Q_n^N\boldsymbol{u}^N, Q_n^N\boldsymbol{u}^N, Q_n^N A\boldsymbol{u}^N)| \leqslant \frac{\lambda}{8}|A\boldsymbol{u}^N|^2 + (\frac{4}{\lambda})^3 c_2^4 |\boldsymbol{u}^N|^2\|\boldsymbol{u}^N\|^4$$

用式(8), 综合式(23)、(24)和上述估计式, 我们导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}^N|^2 + \lambda\|\boldsymbol{u}^N\|^2 \leqslant (\lambda\lambda_1)^{-1}|\boldsymbol{f}|^2 \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}^N\|^2 + \lambda|A\boldsymbol{u}^N|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda}|\boldsymbol{f}|^2 + 4(\frac{4}{\lambda})^3 c_2^4 |\boldsymbol{u}^N|^2\|\boldsymbol{u}^N\|^4 \tag{26}$$

根据文献[1]的方法, 可证得 $\boldsymbol{u}^N \in C(R^+; V) \cap L^2(0, T; D(A))$, $\forall T > 0$, 为了简单, 我们也设

$$\|\boldsymbol{u}^N(t)\| \leqslant M \quad \forall t \geqslant 0 \tag{27}$$

此外, 为了进行收敛速度估计, 我们需要对小涡分量 z 给出估计, 由式(19), 我们可以导出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{z}\|^2 + \lambda|A\boldsymbol{z}|^2 + (B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^N), A\boldsymbol{z}) + (B(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}), A\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{f}, A\boldsymbol{z}) \tag{28}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

通过和上述相似的估计,我们导出

$$\frac{d}{dt}\|z\|^2+\lambda|Az|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}|f|^2+\left(\frac{4}{\lambda}c_1^2\|u^N\|^2L_n+2\left(\frac{4}{\lambda}\right)^3c_2^4|z|^2\|y\|^2\right)\|y\|^2$$

如果选取 n 充分大使得

$$2\lambda_{n+1}^{-1}M^2c_2^4\left(\frac{4}{\lambda}\right)^2\leqslant c_1^2L_n \tag{29}$$

则由式(8)、(9)、(27)和上式可推出

$$\frac{d}{dt}\|z\|^2+\lambda|Az|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}|f|^2+\frac{8}{\lambda}c_1^2M^4L_n \tag{30}$$

或者

$$\frac{d}{dt}\|z\|^2+\lambda\lambda_{n+1}\|z\|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}|f|^2+\frac{8}{\lambda}c_1^2M^4L_n \tag{31}$$

积分(31)式,我们得到

$$\|z(t)\|^2\leqslant e^{-\lambda\lambda_{n+1}t}\|u_0\|^2+\lambda^{-2}L_nM_1^2\lambda_{n+1}^{-1}\quad\forall t\geqslant0 \tag{32}$$

其中:$M_1^2=\frac{2}{\lambda}\sup_{t\geqslant0}|f(t)|^2+\frac{8}{\lambda}c_1^2M^4$. 进一步,如果选择 t_0 使得

$$\lambda\lambda_{n+1}t_0=\gamma L_n \tag{33}$$

其中:$\gamma=\max\{1,\ln(\frac{\lambda_1\|u_0\|^2\lambda^2}{M_1^2})\}$,则

$$\lambda\lambda_{n+1}t_0\geqslant\ln\left(\frac{\lambda_1\|u_0\|^2\lambda^2}{M_1^2L_n}\right)+\lg\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1}=\ln(\lambda^{-2}L_nM_1^2\lambda_{n+1}^{-1}\|u_0\|)$$

于是式(32)产生出

$$\|z(t)\|^2\leqslant2\lambda^{-2}M_1^2L_n\lambda_{n+1}^{-1}\quad\forall t\geqslant t_0 \tag{34}$$

而式(30)产生出

$$\int_0^t|Az|^2dr\leqslant t\lambda^{-1}M_1^2L_n+\varepsilon\leqslant\gamma\lambda^{-2}M_1^2L_n\lambda_{n+1}^{-1}+\varepsilon\quad\forall t\leqslant t_0 \tag{35}$$

其中

$$\varepsilon=\lambda^{-1}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}|\,\|z(t)\|^2-\|z(0)\|^2|$$

由于 $z\in C(R^+;V)$,当 n 充分大时(即 t_0 很小时),ε 是一个小量.

总而言之,当 n 充分大满足式(29)时,小涡分量 $z(t)$ 满足估计式(34)和式(35).

4 收敛速度

首先我们给出古典的谱 Galerkin 算法的收敛速度.

定理2 如果 $u_0\in V, f\in L^\infty(R^+;H)$,则

$$|u(t)-u_N(t)|\leqslant M\lambda_{N+1}^{-1/2}(G(t)L_N^{1/2}\lambda_{N+1}^{-1/2}+1)\quad\forall t\geqslant0 \tag{36}$$

其中

$$G(t)=2\exp(\lambda^{-1}c_0^2\int_0^t\|u\|^2dr)\cdot\int_0^t|Au|^2dr\,\lambda^{-1/2}L_N^{1/2}(c_0^2+c_1^2)^{1/2}$$

证 设 $E=P_Nu-u_N$,则由式(1)和式(10)得出

$$\left(\frac{d}{dt}E,v\right)+\lambda((E,v))+b(u-u_N,u,v)+b(u_N,u-u_N,v)=0\quad\forall v\in H_N \tag{37}$$

在式(37)中取 $v=E$,并利用式(3),我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|E|^2+\lambda\|E\|^2+b(Q_Nu,u,E)+b(u_N,Q_Nu,E)+b(E,u,E)=0 \tag{38}$$

利用式(3)~(5)对式(38)中的三线性项进行估计,我们推出

$$\frac{d}{dt}|E|^2\leqslant\frac{2}{\lambda}c_0^2\|u\|^2|E|^2+4\lambda^{-1}M^2(c_1^2+c_0^2)L_N|Q_Nu|^2 \tag{39}$$

这里用到了式(12)和 $L_N\geqslant1$ 的事实.

积分式(39)并利用式(9),我们得到

$$|E(t)|^2\leqslant\exp\left(\frac{2}{\lambda}c_0^2\int_0^t\|u(r)\|^2dr\right)\frac{4}{\lambda}M^2(c_0^2+c_1^2)L_N\lambda_{N+1}^{-2}\int_0^t|Au|^2dr \tag{40}$$

再利用式(9)和式(12),我们导出

$$|Q_Nu(t)|\leqslant\lambda_{N+1}^{-1/2}\|Q_Nu(t)\|\leqslant\lambda_{N+1}^{-1/2}M \tag{41}$$

于是由式(40)、(41)和三角不等式可推出(36)式.

证毕

下面我们将导出最佳非线性谱 Galerkin 算法的收敛速度. 设 $E=u_N(t)-u^N(t)$,则由(10)式和(18)、(19)式产生

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|E|^2+\lambda\|E\|^2+b(E,u_N,E)+b(z,z,Q_n^NE)=0 \tag{42}$$

$$|b(E,u_N,E)|+|b(z,z,Q_n^NE)|\leqslant\frac{3\lambda}{4}\|E\|^2+\frac{c_0^2}{\lambda}\|u_N\|^2|E|^2+\frac{1}{2\lambda}c_0^2|z|^2\|z\|^2 \tag{43}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

综合(42)式与(43)式, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{E}|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda}c_0^2 \|\boldsymbol{u}_N\|^2 |\boldsymbol{E}|^2 + \lambda^{-1}c_0^2 |\boldsymbol{z}|^2 \|\boldsymbol{z}|^2 \quad \forall t \geqslant 0 \tag{44}$$

积分(44)式并利用(9)式, 我们得到

$$|\boldsymbol{E}(t)|^2 \leqslant \frac{c_0^2}{\lambda}\exp\left(\frac{2}{\lambda}c_0^2 \cdot \int_0^t \|\boldsymbol{u}\|^2 \mathrm{d}r\right)\lambda_{n+1}^{-1}\int_0^t \|\boldsymbol{z}\|^4 \mathrm{d}r \tag{45}$$

如果 $t \leqslant t_0$, 则由(35)式和(9)式产生

$$\int_0^t \|\boldsymbol{z}\|^4 \mathrm{d}r \leqslant \lambda_{n+1}^{-1}\int_0^t \|\boldsymbol{z}\|^2 |A\boldsymbol{z}|^2 \mathrm{d}r \leqslant M^2(\lambda^{-2}M_1^2 L_n \lambda_{n+1}^{-2} + \varepsilon\lambda_{n+1}^{-1}) \tag{46}$$

如果 $t > t_0$, 则由(34)式和(46)式产生

$$\int_0^t \|\boldsymbol{z}\|^4 \mathrm{d}r = \int_0^{t_0} \|\boldsymbol{z}\|^4 \mathrm{d}r + \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{z}\|^4 \mathrm{d}r \leqslant M^2(\lambda^{-2}M^2 L_n \lambda_{n+1}^{-2} + \varepsilon\lambda_{n+1}^{-1}) + 4\lambda^{-4}M_1^4 L_n^2 \lambda_{n+1}^{-2} t \tag{47}$$

综合(45)式与(46)、(47)式, 我们推出

$$|\boldsymbol{E}(t)| \leqslant MK(t)(L_n \lambda_{n+1}^{-1/2} + \varepsilon^{1/2})\lambda_{n+1}^{-1} \tag{48}$$

其中

$$K(t) = 2c_0\lambda^{-1/2}\exp\left(\lambda^{-1}c_0^2\int_0^t \|\boldsymbol{u}_N\|^2 \mathrm{d}r\right) \cdot \max\{\lambda^{-1}M_1, 2\lambda^{-2}M_1^2 M^{-1} t^{1/2}, 1\}$$

于是由式(36)、(48)和三角不等式导出最佳非线性谱 Galerkin 算法的收敛速度.

定理 3　如果 $\boldsymbol{u}_0 \in V, \boldsymbol{f} \in L^{\infty}(R^+; H)$ 以及 $n < N$ 满足(29)式, 则

$$|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^N(t)| \leqslant M\lambda_{N+1}^{-1/2}(G(t)L_N^{1/2}\lambda_{N+1}^{-1/2} + 1) + M\lambda_{n+1}^{-1}K(t)(L_n \lambda_{n+1}^{-1/2} + \varepsilon^{1/2}) \quad \forall t \geqslant 0 \tag{49}$$

注 1　众所周知[4~6], 对于充分大的 n, $\lambda_n \sim \lambda_1 n$ 成立. 由此可见, 如果选取 $n \sim N^{1/2}$, 则 $u^N(t)$ 具有和 $u_N(t)$ 同阶的收敛精度. 然而对于充分大的 N, $n \ll N$, 最佳非线性谱 Galerkin 算法仅仅在于在低维空间 H_n 求解非线性问题, 在高维空间 $H_N \setminus H_n$ 求解线性问题; 而古典的谱 Galerkin 算法需要在高维空间 H_N 上求解非线性问题, 因此本文提出的算法从理论上分析可节省巨大的计算时间.

注 2　(49)式中的 $G(t)$、$K(t)$ 随着 t 的增加而增大, 然而由于 $L_N^{1/2}\lambda_{N+1}^{-1/2}$ 及 $L_n^1\lambda_{n+1}^{-1/2}$ 当 n 充分大时会减小, 因而可在一充分大的时间区间[0, T]上数值求解 Navier-Stokes 方程.

参考文献:

[1]　Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods. SIAM J Numerical Analysis, 1989, 26(5): 1 139~1 157.

[2]　Heywood J G, Rannacher R. On the question of turbulence modeling by approximate inertial manifolds and the nonlinear Galerkin method. SIAM J Numerical Analysis, 1993, 30(6): 1 603~1 621.

[3]　Devulder C, Marion M, Titi E. On the rate of convergence of nonlinear Galerkin methods. Math Comp, 1993, 60: 495~514.

[4]　Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1989.

[5]　Jauberteau F, Rosier C, Temam R. The nonlinear Galerkin method in computational fluid dynamics. Applied Numerical Mathematics, 1989/1990, 6: 361~370.

[6]　Foias C, Sell G, Temam R. Inertial manifalds for nonlinear evolutionary equations. J Differential Equations, 1988, 73: 309~353.

(编辑　杜秀杰)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net