《数量经济技术经济研究》1995年第4期

证券投资方案的选择①

吴 碧 英

投资者进行证券投资决策时，其目标是使获得的收益最大化。然而证券市场具有不确定性，风险是客观存在的。因此，投资者必须对各种证券的收益和风险作一分析，根据其变化趋势对未来的状况进行预测，进而根据个人的偏好选择投资方案。本文就投资者在线性偏好下收益与风险的权衡进行讨论，并提出在两种证券情况下的最优选择。

设有 m 种证券：$s_1,s_2,\cdots,s_m$；考虑时间周期为 T（可以是年、季、月、周等），共有 n 期。我们用 r_{tj} 表示证券 s_j 在第 t 期期间的收益率，则

$$r_{tj}=(\Delta Y_{tj}+D_{tj})/Y_{t-1.j}\ ,\qquad (t=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$$

其中 $\Delta Y_{tj}=Y_{tj}-Y_{t-1.j}$，表示证券 s_j 在第 t 周期内证券的变化价值，Y_{tj} 表示第 t 期的终值（可以是第 t 期期末的收盘价等）；$Y_{t-1.j}$ 表示前一个周期相应的终值；D_{tj} 表示证券 s_j 第 t 期收到的股息或红利，一般地，当周期较短时，可以取 D_{tj} 为零；Y_{oj} 表示第一期期初的值。如果把证券 s_j 的收益率 r_i 看作随机变量，在各期中以等概率取值，则在 m 期内，证券 s_j 的平均收益率为：

$$E(r_j)=\bar{r}_j=(1/m)\sum_{t=1}^{m}r_{tj} \tag{1}$$

我们按其大小可以将这 m 种证券的收益进行排序，然而收益总伴随着风险，那么这 m 种证券的风险水平又是如何呢？在现代投资学中一般用收益的变动幅度来度量风险的大小，因此可用收益率的标准差表示风险，于是有：

$$\text{标准差}\sigma_j=[(1/m)\sum_{t=1}^{m}(r_{tj}-\bar{r}_j)^2]^{1/2} \tag{2}$$

对上述的 m 种证券，计算得相应的标准差 $\sigma_j(j=1,2,\cdots,m)$，也按其大小进行排序，一般说，高收益总是伴随着高风险，低风险总是伴随着低收益；而高收益低风险的情况是比较少见的，这是因为如果证券市场上存在收益高而风险低的证券，则会吸引众多的投资者向其投资，从而使其价格上升导致收益率下降。反之，如果一个风险大的证券收益率反而低会使众多的投资者放弃该证券从而使其价格下降导致收益率提高。

投资者要在这 m 种证券中通过收益与风险的权衡，选择其中的几种，进行适当的组合，使自己的效用最大。例如我们可以选择两种收益率高而彼此间关联程度低的证券，当一种证券下跌时，另一种证券可能上升，这样通过风险间互相吸收达到减少风

①本文为中国科学院管理决策开放实验室资助项目成果之一。

险的目的。两种证券间 s_i 与 s_j 收益间的关联程度可以用相关系数来度量。

$$\rho_{ij} = cov(r_i, r_j) / (\sigma_i \cdot \sigma_j)$$

其中$cov(r_i, r_j) = (1/m)\sum_{t=1}^{m}(r_{ti} - \bar{r}_i)(r_{tj} - \bar{r}_j)$是$r_i$与$r_j$的协方差。

投资者分析了证券间关联程度后，对于选择证券有了依据，但是如何进行精心的安排和科学的搭配，这就得进行收益与风险间的权衡。为讨论方便，取 $m=2$，对一般的 m 可类似推广。设投资者选定两种证券 A 与 B 且 A 种证券的份额为 $X(0 \leqslant X \leqslant 1)$，收益率为 r_A，则 B 种证券所占的份额为 $1-X$，收益率为 r_B，这个证券组合的总收益率为：

$r = X_{r_A} + (1-X)_{r_B}$，记$R_1 = E(r_A)$，$R_2 = E(r_B)$，$R = E(r)$则有：

$$R = XR_1 + (1-X)R_2 \tag{3}$$

而总收益率R的标准差σ满足：

$$\sigma^2 = X^2\sigma_1^2 + (1-X)^2\sigma_2^2 + 2X(1-X)\sigma_{12} \tag{4}$$

其中$\sigma_1^2 = var(r_A)$；$\sigma_2^2 = var(r_B)$；$\sigma_{12} = cov(r_A, r_B)$。

以下我们就一般情况进行讨论，设 $R_1 > R_2$ 且 $\sigma_1 > \sigma_2$（即高收益伴随着高风险），证券 A 与证券 B 如何组合，才能使投资者获得最大的满足？为此我们由（1）和（2）消去 X 得到：

$$\sigma^2 - \alpha(R - \beta/\alpha)^2 = \gamma - \beta^2/\alpha \tag{5}$$

其中：$\alpha = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})/\delta^2$；　$\beta = [\sigma_1^2 R_2 + \sigma_2^2 R_1 - \sigma_{12}(R_1 + R_2)]/\delta^2$

$\gamma = (\sigma_1^2 R_2^2 + \sigma_2^2 R_1^2 - 2\sigma_{12}R_1R_2)/\delta^2$；　$\delta = R_1 - R_2$

显然，$\alpha > 0$，所以在 (σ, R) 平面上，（4）式是一条双曲线。由（3）和（4）式得到：当 $x=1$ 时，$R=R_1$，$\sigma=\sigma_1$；当 $x=0$ 时，$R=R_2$，$\sigma=\sigma_2$。

在直角坐标系上，当曲线上的点沿着曲线向东北方向运动时，证券 A 的份额加大，证券 B 的份额减少；当 $x<1/2$ 时，期望收益呈不断增加的趋势，而风险呈减少的趋势；当 $x>1/2$ 时，期望收益和风险均呈增加的趋势；当 $x=1$ 时，期望收益和风险都达到了最大值。我们感兴趣的是在同一风险水平下收益最大者；在同等收益情况下风险最小者，为讨论方便将与其相应的组合称为有效组合。

当两种证券完全正（负）相关时，即 $\rho_{12} = \pm 1$，此时双曲线退化为直线。

由以上的讨论可以看出，作为投资者必须考虑从这些有效组合中找出使自己满意的组合。有的投资者富有冒险精神，敢于冒高风险以求得高收益；有的投资者追求稳定的收入，不愿意冒风险，要其冒一份冒险必须以至少获取二份以上的收益来补偿。为使不同偏好的投资者从有效组合中选出最优组合，我们给出以下线性偏好准则：

$$f(\sigma, R) = R - k\sigma \tag{6}$$

其中 k 为正常数，称为风险系数。这准则的经济意义是：把期望收益扣除标准差（风险）的 k 倍后余下的收益作为投资者的目标，也就是说，投资者愿意以增加 1% 的风

险为代价以换取增加 $k\%$ 的收益；或者说愿意减少 $k\%$ 的收益为代价换取减少 1% 的风险。这里 k 取值的差异体现了投资者的不同偏好，当 $k>1$ 时，意味着投资者比较保守，只愿意承受较小的风险来换取收益较大幅度的增加，k 的值越大，意味着投资者越保守：$k<1$ 时，意味着投资者比较冒险，愿意冒较大的风险以换取收益的增加，$k=1$ 时，可以认为投资者呈中性，愿意以增加 1% 的风险为代价换取收益增加 1%。这样，对于不同的投资者的偏好可用 k 取值的差异来区别。例如对于某个投资者（对确定的 k）而言，（6）式就是一族无差别直线，在这些直线上，投资者对各种不同的投资方案的收益与风险的组合满足程度无差别，现在的问题是在有效组合中寻找最优组合使得 $f(R,\sigma)$ 取得最大值。因此原问题就化为求目标函数 $f(R,\sigma)$ 在约束条件（4）下的最大值。事实上就是求无差别直线族与双曲线（4）的切点，也就是求解如下规划问题：

$$\max \quad f=R-k\sigma$$
$$s.t.\ \sigma^2-\alpha(R-\beta/\alpha)^2=\gamma-\beta^2/\alpha$$

不难求得这个问题的解是：

$$R=(1/\alpha)[(\alpha\gamma-\beta^2)/(\alpha K^2-1)]^{1/2}+\beta/\alpha \tag{7}$$

$$\sigma=K[(\alpha\gamma-\beta^2)/(\alpha K^2-1)]^{1/2} \tag{8}$$

再将 R 与 σ 的值代入（3）或（4）式就可求出 X 的值而得到最优组合了。

显然，要使（7）和（8）式有意义，参数 k 必须满足 $k>k_1=(1/\alpha)^{1/2}$，事实上，k_1 也就是双曲线（5）上半部分渐近线的斜率。另外，当无差别直线族（6）中的直线 $f=R-k_o\sigma$ 与双曲线线（5）切于点 $M(r_1,\sigma_1)$ 时，这时投资者只投资于一种证券（$X=1$），期望收益和风险水平都达到了最大值，这是一种极端的情况，反映出冒险型投资者的极限状况，这时无差别直线 $f=R-k_o\sigma$ 的斜率 k_o 是参数 k 的最小值，称为参数 k 的临界值。我们可以利用导数的几何意义求得：

$$k_o=\sigma_1/(\alpha r_1-\beta)$$

一般地，我们考虑进行证券组合时，感兴趣的并不是 $X=1$ 的情况，因此参数 k 的取值范围是：

$$k\geqslant\sigma_1/(\alpha r_1-\beta)$$

而当 $(1/\alpha)^{1/2}<k<\sigma_1/(\alpha r_1-\beta)$ 时，由（3）求得 $X>1$，这相当于进行信用交易，目前在我国证券市场这是不允许的，所以此时我们取 $X=1$。当 k 趋于无穷大时，无差别直线族（6）与双曲线相切，由（7）和（8）式得到切点坐标：

$$\sigma_N=\beta/\alpha,\quad R_N(\gamma-\beta_2/\alpha)^{1/2}$$

这是保守型投资者的极限状况。

我们以在上海证券交易所上市的延中、小飞乐、爱使、申华、大飞乐、凤凰、兴业、二纺机、电真空、豫园等十种股票为例作一说明。为简单起见，将它们依次记为 s_1，s_2，s_3，s_4，s_5，s_6，s_7，s_8，s_9，s_{10}；取周期 T 为周，数据取值从 1992 年 9 月 21 日到 1993 年 6 月 25 日，共 38 期（$n=38$）；因周期较短，取 $D_t=0$，取第 t 期

周末的收盘价为终值 y_t，由（1）及（2）算得 r_j 及 σ_j 如表 1 所示

表 1 收益率与标准差

证　券	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
收益率 r	1.707	1.018	1.711	1.164	2.047	0.863	1.772	2.142	1.605	2.242
标准差 σ	16.44	19.01	21.82	20.77	15.70	13.42	16.98	17.04	22.83	14.58

从收益率看，排序是：$r_{10} > r_8 > r_5 > r_7 > r_3 > r_1 > r_9 > r_4 > r_2 > r_6$

从风险水平看，排序是：$\sigma_9 > \sigma_3 > \sigma_4 > \sigma_2 > \sigma_8 > \sigma_7 > \sigma_1 > \sigma_5 > \sigma_{10} > \sigma_6$

由以上的比较可知，如果投资者只投资一种证券，可能有以下几种情况：

（1）投资者决策时只考虑期望收益，那么由排序（8），他将选择 s_{10}（豫园）；

（2）投资者决策时只考虑风险水平，那么由排序（9），他将选择 s_6（凤凰）；

（3）投资者决策时考虑到收益和风险两个方面，高收益而低风险是他们追求，由表（1）可以看出，s_{10} 的收益率较高而风险相对较低，因此投资者将会选它。

事实上，投资者投资于多种证券可以分散风险提高收益，也就是说要进行证券组合投资，例如当 s_{10} 与 s_6 的份额分别为 53.4%、46.6%（或 61.2%、38.8%）的组合就优于表（1）中只投资于一种证券 s_6 的情况，这是因为在不增加风险的情况下，期望收益都翻了一翻（见表 2）。另外，如果投资者希望期望收益率在 1.70% 左右，在只投资一种证券的情况下，由表（1）知他应选择 s_1（延中），此时 $\sigma = 16.44\%$，而选择 s_{10}（豫园）的份额为 61.2% 与 s_6 份额为 38.8% 的组合时比前者更好，因为在同等收益水平下，后者风险更小（见表 2）。

投资者在考虑进行证券组合时，首先必须根据确定的目标选择几种证券，求出它们的有效组合，进而根据投资者的偏好再找出最优组合。这里我们仍然只考虑两种证券组合的情况。例如投资者希望高收益而低风险，那么他可从以上十种证券中选出 s_6 和 s_{10}，由表（1）看出前者期望收益最高（$r_{10} = 2.242\%$），后者风险最小（$\sigma_6 = 0.863\%$），它们的相关系数也较小。我们可由（3）和（5）求得有效组合（这里 $\sigma_1 = 14.58\%$，$\sigma_2 = 13.42\%$，$\sigma_{12} = 0.0139$，$r_1 = 2.242\%$，$r_2 = 0.863\%$），再根据（3）式求得 s_{10} 的份额 X，其中部分有效组合和 s_{10} 的份额 X，选取其中一部分有效组合列为表（2）。以下我们依投资者的不同偏好，k 的值分别取为 0.26、0.5、0.75、1、2、10000，根据（6）、（7）式和（3）式得最优组合（如表 3），这里 k 的临界值 k_0 等于 0.26。

表 2　　s_{10}和s_6的部分有效组合

收益 R	1.599	1.703	1.814	1.921	2.028	2.135	2.242
风险 σ	13.10	13.28	13.50	13.77	14.09	14.46	14.86
X	0.53	0.61	0.69	0.77	0.85	0.92	1.00
$1-X$	0.47	0.39	0.31	0.23	0.15	0.08	0.00

（表中的 X 表示 s_{10} 的份额，$1-X$ 表示 s_6 的份额，下同）

表 3　　不同偏好下的最优组合

k	0.26	0.5	0.75	1	2	10000
r	2.24	1.74	1.59	1.53	1.42	1.32
σ	14.86	13.34	13.02	11.61	11.58	11.56
X	1.00	0.64	0.53	0.48	0.41	0.33
$1-X$	0.00	0.36	0.47	0.52	0.59	0.67

由表（3）可以看出：$k=0.26$ 和 $k=10000$ 是两种极端的情况，$k=0..26$ 表明投资者是冒险型的，此时只投资于一种证券，要冒最大的风险期望获得最大的收益；就是 $X=1$ 的情况，此时期望收益和风险都达到了最大值；当 $k=10000$ 时，相当于 k 趋于无穷大的情况，这表明投资者是保守型的，他宁愿收益最低而承受最小的风险。

1994 年 10 月

（作者单位：厦门大学财金系）

更　正

本刊 1995 年第 3 期第 27 页倒数第 4 行应为“更一般意义上生产函数的移动”。

作者