中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 7 期: 857 ～ 872
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
自然科学基金项目进展专栏 综 述

边界元方法中超奇异积分的计算方法

献给林群教授 80 华诞

李金[1,2]*, 余德浩[3,4]

① 山东大学数学学院, 济南 250100;
② 山东建筑大学理学院, 济南 250101;
③ 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005;
④ 中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100080
E-mail: lijin@lsec.cc.ac.cn, ydh@lsec.cc.ac.cn

收稿日期: 2014-09-29; 接受日期: 2014-12-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11471195, 11101247, 11201209 和 91330106) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2013M540541) 资助项目

摘要 超奇异积分的近似计算是边界元方法, 特别是自然边界元理论中必须面对的难题之一. 经典的数值方法, 如 Gauss 求积公式和 Newton-Cotes 积分公式等数值方法, 都不能直接用于超奇异积分的近似计算. 本文将介绍超奇异积分基于不同定义的 Gauss 积分公式、S 型变换公式、Newton-Cotes 积分公式和外推法近似计算超奇异积分的思路, 重点阐述 Newton-Cotes 积分公式和基于有限部分积分定义的外推法近似计算超奇异积分的主要结论.

关键词 自然边界元 超奇异积分 误差泛函 Newton-Cotes 积分公式

MSC (2010) 主题分类 35S15, 65M38

1 引言

科学与工程中的大量问题可以归结为无界区域上偏微分方程的数值求解问题, 如弹性力学、断裂力学、流体力学、电磁场、热传导和计算生物等问题的求解. 在这些问题中, 物理区域的无界性给问题的求解带来了本质性的困难, 而已有的成熟的数值方法, 如有限差分法和有限元方法, 都不能直接用于该类问题的数值求解. 解决这类问题的一个办法是, 引进一个人工边界将无界物理区域分为两部分, 即有界的计算区域和余下的无界区域. 新引进的人工边界成为有界计算区域的边界. 在人工边界上, 原问题的解必须满足准确的边界条件或构造近似边界条件. 对于 Laplace 方程和 Helmholtz 方程等内外边值问题的数值解, 应用 Green 函数方法在圆周人工边界上得到原问题的解满足准确的人工边界条件, 用超奇异积分表示, 称为自然边界元方法. 该边界条件为 Dirichlet to Neumann (DtN) 映射或 Steklov-Poincare 映射, 因此, 准确的人工边界元方法也称为自然边界元法或 DtN 方法. 我国的冯康[1]、余德浩[2] 和韩厚德[3] 对该方法的理论发展与实际应用作出了开创性的工作. 随后, Keller 和 Givoli[4] 也对该方法的发展与应用作出重要贡献. 在实际工程计算中的近似人工边界条件在工程界也

英文引用格式: Li J, Yu D H. Numerical methods to compute hypersingular integral in boundary element methods (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 857–872, doi: 10.1360/N012014-00200

称为吸收人工边界条件、无反射人工边界条件、开边界条件、透明人工边界条件、完全吸收人工边界条件或非线性人工边界条件等. 近年发展起来的完美匹配层 (PML) 方法其实质也可视为一种人工边界法, 只是其人工边界不再是简单曲线或曲面, 而是一个相应的边界层. 三十余年来, 边界元方法已成为继有限差分方法和有限元法之后发展起来的重要数值计算方法之一, 特别在许多无界区域问题的实际工程计算中已得到广泛的应用.

边界元方法的主要优点是将所处理问题的空间维数降低一维. 它只需对边界进行单元剖分, 只要求出边界节点上的解函数值就可计算区域内任意点的解函数值. 这对于无界区域上的问题求解特别有意义. 在数值计算方面, 尽管得到的刚度矩阵是非稀疏的, 从而增加了一些计算的困难, 但是刚度矩阵具有的某些优良性质, 如循环对称性和 M 矩阵性质, 使得边界元方法在计算许多工程问题的成功应用而引起人们对这个方法的充分重视, 有大量的专著 [5–7] 和文献出版.

由不同的边界归化方法得到不同类型的边界积分方程, 它们可能是非奇异的, 可能是弱奇异的, 可能是 Cauchy 型奇异的, 也可能是超奇异的, 而由自然边界归化得到积分方程都是超奇异的. 相应的超奇异积分在通常 Riemann 意义下是发散的、没有意义的. 由于其超奇异性带来的数值计算的困难以及对这类积分的定义和性质没有足够的理解, 在很长的一段时期人们都极力避免去计算超奇异积分. 直到 20 世纪七八十年代, 随着科技的进步和计算机技术的发展, 关于超奇异积分计算的研究工作才开始重新得到关注. 经过许多学者的努力, 关于超奇异积分、超奇异积分方程理论和数值计算方法的文献才在数学与工程杂志上相继出现. 因为在各类边界元方法的实际计算中, 这类积分经常出现, 超奇异积分的数值计算便不可避免, 最初的方法是通过分部积分降低积分核的奇异阶, 即 “正则化过”. 这种方法使得在计算过程中产生新的变量 (即密度函数的导数), 从而使原积分方程的解通过这种方法间接地求得. 与正则化方法不同, 余德浩则首先提出了积分核级数展开法[8–12], 得到了级数形式的准确人工边界条件, 用来直接求解由自然边界归化得到的超奇异积分方程. 由于无论应用配置法还是应用 Galerkin 法, 都要将超奇异积分方程离散为线性代数方程组, 于是问题的关键便在于如何得到这个代数方程组的系数, 也就必须解决超奇异积分的数值计算问题.

近二三十年来, 随着人们对超奇异积分的深入研究, 适用于计算超奇异积分的相应的数值求积公式渐渐出现, 主要包括 Gauss 求积公式[13–18]、复化 Newton-Cotes 公式[19–26]、S 型变换法[27–30] 和其他一些数值方法[31–34]. 当密度函数充分光滑时, Gauss 求积方法和 S 型变换法非常有效. 当解函数的光滑性较低时, 上述两种方法就失去了其优越性, 而复化 Newton-Cotes 法基于分片插值适合解函数光滑性较低的情形. 另外, 相比较于其他方法, 复化 Newton-Cotes 公式在数值上更加容易实现, 并且它对网格的选取相对灵活和宽松.

超奇异积分的复化 Newton-Cotes 公式最早由 Linz [20] 提出, 他给出了二阶超奇异积分的复化梯形公式和 Simpson 公式以及相应的误差估计, 其中特别强调了网格选取的重要性, 如果奇异点位于节点附近, 该方法将失效, 并提出了近似取中点法来克服这个难点. 随后, 文献 [35, 36] 对该方法作了推广, 首次给出了奇异点与剖分节点重合的梯形公式, 后来也对圆周上的超奇异积分给出了梯形公式的计算方法. 余德浩还提出了在奇异点附近节点几何加密以提高计算精度的方法. 近年来, 超奇异积分的超收敛现象也得到了关注. 文献 [24] 研究了区间上二阶超奇异积分任意阶复化 Newton-Cotes 公式的超收敛现象, 证明了超收敛现象出现在某个函数零点, 从本质上揭示了超收敛现象产生的原因.

使用外推法来加速收敛的技巧已经广泛应用到计算数学的各个领域, 但研究超奇异积分的外推算法和理论还相对较少, 文献 [37] 研究了区间上梯形公式近似计算二阶超奇异积分误差展开式, 当密度函数足够光滑时, 给出了误差泛函中奇异部分的显式表达式; 首次提出了超奇异积分基于有限部分积分定义的外推算法.

本文结构如下: 第 2 节给出超奇异积分的定义和基本性质; 第 3 节简要介绍 Gauss 积分公式、S 型变换公式、Newton-Cotes 积分公式和外推法等近似计算超奇异积分典型的数值方法, 重点介绍 Newton-Cotes 公式近似计算超奇异积分的误差泛函和相应超收敛结果以及区间上基于梯形公式外推法近似计算二阶超奇异积分的主要结论; 第 4 节是对本文的总结; 第 5 节对下一步工作进行展望.

2 超奇异积分的定义

2.1 二阶超奇异积分的定义

超奇异积分的定义最早由 Hadamard [38] 给出, 因此也称为 Hadamard 有限部分积分

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_a^{s-\epsilon}\frac{f(x)}{(x-s)^2}\,dx + \int_{s+\epsilon}^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}\,dx - \frac{2f(s)}{\epsilon}\right\}; \tag{2.1}$$

当密度函数 $f(x)$ Hölder 连续时, 称为有限部分可积的. 将密度函数 $f(x)$ 在奇异点 s 处 Taylor 展开, 超奇异积分部分按照有限部分积分定义计算, 则得到超奇异积分的奇异分离, 它也可看作超奇异积分的另一种定义

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}\,dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(s)-f'(s)(x-s)}{(x-s)^2}\,dx - f(s)\left[\frac{1}{b-s}-\frac{1}{a-s}\right] + f'(s)\ln\frac{b-s}{s-a}; \tag{2.2}$$

而对 Cauchy 主值积分求导, 则得到 Hadamard 有限部分积分的求导定义

$$\frac{d}{ds}\int_a^b \frac{f(x)}{x-s}\,dx = \mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}\,dx, \quad s\in(a,b). \tag{2.3}$$

超奇异积分的不同定义在一定条件下是等价的, 详细的介绍见文献 [39,40].

2.2 二阶超奇异积分的推广

当奇异积分的奇异性高于 2 时, 有如下定义:

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^b\right)\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx - \sum_{j=0}^{p-1}\frac{(-1)^j f^{(j)}(s)}{j!}\frac{1-(-1)^{p-j}}{(p-j)\varepsilon^{p-j}}\right\}. \tag{2.4}$$

特别地, 有

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^b\right)\frac{f(x)}{(x-s)^3}dx - \frac{2f'(s)}{\epsilon}\right\}, \tag{2.5}$$

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^4}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^b\right)\frac{f(x)}{(x-s)^4}dx - \frac{f''(s)}{\epsilon} - \frac{2f(s)}{3\epsilon^3}\right\}. \tag{2.6}$$

类似地, 也有相应的奇异分离定义

$$\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx = \int_a^b \frac{1}{(x-s)^{p+1}}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{r}\frac{f^{(j)}(s)(x-s)^j}{j!}\right]dx + \sum_{j=0}^{r}\frac{f^{(j)}(s)}{j!}\mathop{=\!\!\!\!\!\!\int}\nolimits_a^b \frac{dx}{(x-s)^{p+1-j}}, \tag{2.7}$$

其中 $p\geqslant 0$, $r>p$, $s\in(a,b)$.

对 $p\in\mathbb{N}$, $s\in(a,b)$, 奇异积分满足线性, 即

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{\alpha f(x)+\beta g(x)}{(x-s)^{p+1}}dx=\alpha\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx+\beta\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{g(x)}{(x-s)^{p+1}}dx, \tag{2.8}$$

以及

$$\frac{d}{dx}\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p}}dx=p\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx,\quad s\in(a,b) \tag{2.9}$$

和

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx=\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p}}dx,\quad s\in(a,b), \tag{2.10}$$

进而我们有

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx=\frac{1}{p!}\frac{d^p}{dx^p}\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{x-s}dx,\quad s\in(a,b). \tag{2.11}$$

对线性变换, 有如下结论:

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx=\left(\frac{2}{b-a}\right)^p\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{g(u)}{(u-X)^{p+1}}du,\quad s\in(a,b), \tag{2.12}$$

其中

$$X=\frac{2x-b-a}{b-a},\quad g(u)=f\left(\frac{1}{2}(b-a)u+\frac{1}{2}(b+a)\right).$$

若 $s=a$, 有

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{f(x)}{(x-s)^{p+1}}dx=\left(\frac{2}{b-a}\right)^p\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{g(u)}{(u-X)^{p+1}}du-\frac{f^{(p)}(a)}{p!}\ln\left[\frac{b-a}{2}\right]. \tag{2.13}$$

3 超奇异积分的计算

根据超奇异积分不同的定义和密度函数的性质, 可将超奇异积分的计算分为解析计算和数值近似计算两大类.

3.1 超奇异积分直接计算

这里给出密度函数为常数函数、多项式函数、指数函数和三角函数时超奇异积分的计算公式如下:

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{1}{(x-s)^2}dx=-\frac{1}{b-s}-\frac{1}{s-a},\quad s\in(a,b). \tag{3.1}$$

对任意的正整数 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{x^n}{(x-s)^2}dx=x^n\frac{a-b}{(b-s)(s-a)}+nx^{n-1}\log\frac{b-s}{s-a}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ks^{k-1}}{n-k}(b^{n-k}-a^{n-k}),\quad s\in(a,b), \tag{3.2}$$

以及

$$\int_a^b\!\!\!\!\!\!\!=\frac{\mathrm{e}^{kx}}{(x-s)^2}dx=\mathrm{e}^{ks}\left[\frac{a-b}{(b-s)(s-a)}+k\log\frac{b-s}{s-a}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^{j+1}((b-s)^j-(s-a)^j)}{j(j+1)!}\right],\quad s\in(a,b) \tag{3.3}$$

和

$$\oint_a^b \frac{\sin x}{(x-s)^2}dx = \cos s\left[\log\frac{b-s}{s-a} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(b-s)^{2j}-(s-a)^{2j}}{2j(2j+1)!}\right]$$

$$+\sin s\left[\frac{a-b}{(b-s)(s-a)} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(b-s)^{2j-1}-(s-a)^{2j-1}}{(2j-1)(2j)!}\right]. \tag{3.4}$$

详细的计算过程见文献 [41].

3.2 超奇异积分的数值计算

对于密度函数不是解析函数或者密度函数本身就是离散数据的情形, 超奇异积分不能解析计算, 这就要用到数值方法. 根据密度函数正则性的不同, 有不同的数值方法用于超奇异积分的近似计算, 如 Gauss 求积法、S 型变换法、复化 Newton-Cotes 法和外推法等. 下面简要介绍这些方法的基本思想.

3.2.1 Gauss 求积公式

对于 Riemann 积分, Gauss 求积方法由于其精度高而得到广泛应用. 而对于超奇异积分, 经典的 Gauss 求积方法则不能够直接使用. 根据超奇异积分不同的定义, Gauss 求积方法可以分为基于奇异分离定义的 Gauss 求积方法和基于 Cauchy 主值积分求导定义的 Gauss 求积方法.

下面对基于 Cauchy 主值积分求导定义 [42,43] 的 Gauss 求积方法作简要介绍. 首先对 Cauchy 主值积分

$$I_0(f,s) = \int\!\!\!\!-_a^b \omega(x)\frac{f(x)}{x-s}dx, \quad s\in(a,b), \tag{3.5}$$

有近似公式

$$\int\!\!\!\!-_a^b \omega(x)\frac{f(x)}{x-s}dx \cong -\frac{2f(s)}{\phi_n(s)}q_n(s) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{f(x_i)}{x_i-s}, \quad s\neq x_i, \tag{3.6}$$

其中 $\cong$ 表示近似计算, x_i 是多项式 $\phi_n(x)$ 的根, 且满足正交关系

$$\int_a^b \omega(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn}, \tag{3.7}$$

这里 δ_{mn} 为 Kronecker 符号, $q_n(s)$ 定义为

$$q_n(s) = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\omega(x)\phi_n(x)}{s-x}dx, \tag{3.8}$$

λ_i 定义为

$$\lambda_i = \frac{-k_{n+1}}{k_n\phi_n'(x_i)\phi_{n+1}(x_i)}, \tag{3.9}$$

且 k_n 定义为 $\phi_n = k_n x^n + \cdots$.

(1) Cauchy 主值积分的 Gauss-Legendre 求积公式.

若 $\phi_n = \sqrt{(2n+1)/2}P_n(x)$, 其中 $P_n(x)$ 是第一类 Legendre 多项式, 且 $\omega(x)=1$, 那么, 对 (3.6), 则有

$$\int\!\!\!\!-_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-s}dx \cong -\frac{2f(s)}{P_n(s)}Q_n(s) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{f(x_i)}{x_i-s}, \quad s\neq x_i, \tag{3.10}$$

其中 Q_n 为第二类 Legendre 多项式, x_i 为 $P_n(x)$ 的根, 且

$$\lambda_i = \frac{-2}{(n+1)P_n'(x_i)P_{n+1}(x_i)}. \tag{3.11}$$

(2) Cauchy 主值积分的 Gauss-Chebyshev 求积公式.

若 $\phi_n = a_n U_{n-1}(x)$, 其中 $U_{n-1}(x)$ 为第二类 Chebyshev 多项式且 a_n 为正则化因子, 权函数 $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ 满足正交条件

$$\langle a_m U_{m-1}, a_n U_{n-1}\rangle = \delta_{mn},$$

那么, 对 (3.8), 则有

$$q_n(s) = \frac{1}{2}a_n \int_a^b \frac{\omega(x)U_{n-1}(x)}{s-x}dx = \frac{\pi}{2}a_n T_n(s), \tag{3.12}$$

其中 $T_n(s)$ 为第一类 Chebyshev 多项式. 于是有

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{1/2}f(x)}{x-s}dx \cong -\frac{\pi f(s)}{U_{n-1}(s)}T_n(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f(x_i)}{x_i - s}, \quad s \neq x_i, \tag{3.13}$$

其中 x_i 为 $U_{n-1}(s)$ 的根, 且

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n}, \tag{3.14}$$

以及

$$\lambda_i = \frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}. \tag{3.15}$$

根据关系式

$$\frac{d}{ds}\int_a^b \frac{f(x)}{x-s}dx = \int_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}dx, \tag{3.16}$$

则有

$$\int_a^b \omega(x)\frac{f(x)}{(x-s)^2}dx \cong -\frac{2f'(s)}{\phi_n(s)}q_n(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f(x_i)}{(x_i-s)^2} - \frac{2f(s)}{\phi_n(s)}q_n'(s) - \frac{2f(s)}{\phi_n^2(s)}q_n(s)\phi_n'(s). \tag{3.17}$$

于是得到对应于 Legendre 多项式和 Chebyshev 多项式的求积方法分别为

$$\int_{-1}^1 \omega(x)\frac{f(x)}{(x-s)^2}dx \cong -\frac{2f'(s)}{P_n(s)}Q_n(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f(x_i)}{(x_i-s)^2} - \frac{2f(s)}{P_n^2(s)}q_n(s)(1-s^2)^{-1} \tag{3.18}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{1/2}f(x)}{(x-s)^2}dx \cong & -\frac{2\pi f(s)}{U_{n-1}(s)}Q_n'(s) - \frac{2\pi f(s)}{U_{n-1}^2(s)}Q_n(s)U_{n-1}'(s) \\ & - \frac{\pi f'(s)}{U_{n-1}(s)}T_n(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{f(x_i)}{(x_i-s)^2}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

注意到 (3.10) 和 (3.13) 的积分限是从 -1 到 1, 对任意的区间 (a,b) 可以通过线性变换

$$2\bar{x} = (b-a)x + (b+a), \quad 2\bar{s} = (b-a)s + (b+a),$$

其中 $\bar{x}, \bar{s} \in (a,b)$, $x, s \in (-1,1)$.

在最近的文献 [17] 中, 作者证明了求导定义和奇异分离定义下两种 Gauss 方法的等价性, 而且给出了其超收敛分析.

3.2.2 S 型变换法

S 型变换是一种 $[0,1]$ 到本身的映射, 它可以使变换后的函数具备一定阶数的周期性. 经过某个 S 型变换后, 便得到较快的收敛速度. 这里, 我们介绍 S 型变换的主要思路, 详细内容见文献 [28, 29].

设 α 为一个正的非整数, 它使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n < \alpha < n+1$. 再设 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $N \gg \alpha$. 称函数 f 属于空间 K_α^N, 如果

(1) $f \in C^{(N)}(0,1)$;

(2) $f^{(j)} \in C_0[0,1], \ \ j = 0, \dots, n-1$;

(3) $\int_0^1 (x(1-x))^{j-\alpha} |f^{(j)}(x)|\, dx < \infty$, $j = 0, \dots, N$.

另外, 定义空间 K_α^N 的模为

$$\|f\|_{\alpha,N} := \max_{j=0,\dots,N} \int_0^1 (x(1-x))^{j-\alpha} |f^{(j)}(x)|\, dx, \tag{3.20}$$

则空间 K_α^N 的函数 f 有如下性质:

(1) 对于 $j = 0, \dots, n$, $f^{(j)}$ 在区间 $(0,1)$ 上可积, 且存在某个正常数 C 使得

$$\int_0^1 |f^{(j)}(x)|\, dx \leqslant C \|f\|_{\alpha,N};$$

(2) 存在某个正常数 C 使得

$$|f^{(j)}(x)| \leqslant C[x(1-x)]^{\alpha-(j+1)}, \quad j = 0, \dots, N-1. \tag{3.21}$$

引入一个 S 型变换 γ_r, 其中 $r > 1$ 表示变换的阶, 它是一个 $[0,1]$ 到自身的一一映射, 定义为实值函数, γ_r 称为 $r \geqslant 1$ 阶 S 型变换, 如果它满足以下条件:

(1) $\gamma_r \in C^1[0,1] \cap C^\infty(0,1)$ 且 $\gamma_r(0) = 0$;

(2) $\gamma_r(x) + \gamma_r(1-x) = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(3) γ_r 在区间 $[0,1]$ 上严格递增;

(4) γ_r' 在区间 $[0,1]$ 上严格递增且 $\gamma_r'(0) = 0$;

(5) 在 $x = 0$ 附近, $\gamma_r^{(j)} = O(x^{r-j})$, $j \in \mathbb{N}$.

当 $r > 1$ 时, γ_r 的图像呈 S 形状, S 型变换 (sigmoidal trasformation) 由此得名.

下面简要介绍代数型 S 变换和积分型 S 变换:

(1) 代数型 S 变换

$$\gamma_r(x) = \frac{x^r}{x^r + (1-x)^r}, \quad x \in [0,1], \quad r > 1$$

为 r 阶变换;

(2) 积分型 S 变换

$$\gamma_r(x) = \frac{\int_0^x h(\xi)\, d\xi}{\int_0^1 h(\xi)\, d\xi}, \quad x \in [0,1],$$

(i) 当 $h(x) = (x(1-x))^{r-1}, r > 1$ 时, $\gamma_r(x)$ 为 r 阶变换;

(ii) 当 $h(x) = \exp(-(1/x + 1/(1-x)))$ 时, $\gamma_r(x)$ 为无穷阶变换.

对于超奇异积分

$$I_1(f,s) = \,=\!\!\!\!\!\!\int_0^1 \frac{f(x)}{(x-s)^2}\, dx, \quad s \in (0,1), \tag{3.22}$$

定义积分公式

$$(Q_{2,m}^{[\nu]}f)(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}\dfrac{f(\frac{j+t_\nu}{m})}{(\frac{j+t_\nu}{m}-s)^2}, & ms-t_\nu\notin\mathbb{Z},\\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{\substack{j=0,\\ s\neq j/m}}^{m}{}''\dfrac{f(\frac{j}{m})}{(\frac{j}{m}-s)^2}, & ms-t_\nu\in\mathbb{Z}\end{cases}\tag{3.23}$$

和

$$(S_{2,m}^{[\nu]}f)(s)=\begin{cases}\pi f'(s)\cot(\pi(t_\nu-ms))+\pi^2 mf(x)\csc^2(\pi(t_\nu-ms)), & ms-t_\nu\notin\mathbb{Z},\\ -\dfrac{m\pi^2}{3}f(s)+\dfrac{f''(s)}{2m}, & ms-t_\nu\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{3.24}$$

其中

$$t_\nu:=\frac{\nu+1}{2},\quad -1<\nu\leqslant 1,$$

则有

$$\begin{aligned}I_1(f,s)=&(Q_{2,m}^{[\nu]}f)(s)-(S_{2,m}^{[\nu]}f)(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\bar{B}_j(t_\nu)}{j!}\frac{1}{m^j}\left\{\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left(\frac{f(x)}{(x-s)^2}\right)\bigg|_{x=1}\right.\\ &\left.-\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left(\frac{f(x)}{(x-s)^2}\right)\bigg|_{x=0}\right\}+(E_{2,m}^{[\mu]}f)(s),\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中

$$(E_{2,m}^{[\mu]}f)(s)=\frac{1}{m^n}\int_0^1\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(s)}{(x-s)^2}-\frac{\partial\psi(x;s)}{\partial s}\right)\frac{\bar{B}_n(t_\nu-ms)}{n!}\,dx,\tag{3.26}$$

$$\psi(x;s)=\begin{cases}\pi f(s)\cot(\pi(x-s)), & x-s\notin\mathbb{Z},\\ 0, & x-s\in\mathbb{Z}.\end{cases}\tag{3.27}$$

3.2.3 Newton-Cotes 公式

超奇异积分由于其积分核的超奇异性, 经典的数值方法一般来说都是发散的. 对于 Riemann 积分, 当 k 为奇数时, k 阶复化 Newton-Cotes 公式的收敛阶为 $O(h^{k+1})$; 而 k 为偶数时, 其收敛阶则可以达到 $O(h^{k+2})$. 如果直接用 Newton-Cotes 公式计算超奇异积分, 其结果则是发散的.

最早关于复化 Newton-Cotes 公式计算超奇异积分的是文献 [20], 1985 年由美国学者 Linz 给出, 他采用离散密度函数的方法, 对超奇异积分核解析计算, 给出了计算区间上二阶超奇异积分的复化梯形公式和 Simpson 公式, 并给出了相应的误差分析, 证明了其收敛阶为 $O(h^k)$, $k=1,2$, 这要比 Riemann 积分的收敛阶低; 而且对于奇异点与剖分结点重合时, 此方法失效, 因此, 本文提出近似取中点法来克服这个难点.

对于奇异点与剖分节点重合的情形, Yu [35] 基于新的定义, 修正了梯形公式计算二阶超奇异积分, 并给出了计算公式和相应的误差估计. 文献 [23] 首先用梯形公式进行计算圆周上的超奇异积分, 并给出了具体的 Cotes 系数, 采用局部加密的自适应思想并证明相应的误差. 后来, 文献 [44] 又提出了一种算法, 在计算量增加一倍的情形下, 克服了奇异点位置选取的制约, 随后, 文献 [19] 将这个想法应用到了计算三阶超奇异积分.

近年来, 文献 [45] 研究了区间上二阶超奇异积分复化 Simpson 公式的超收敛现象, 之后作了一系列关于复化 Newton-Cotes 公式超收敛分析的研究工作. 对于任意阶 Newton-Cotes 公式计算区间上二

阶超奇异积分, 文献 [22] 证明了超收敛现象出现在某个特殊函数的零点, 并研究了这种特殊函数的性质. 文献 [25, 46] 给出了圆周上超奇异积分的任意阶复化 Newton-Cotes 公式以及相应的超收敛性现象. 与区间上超奇异积分不同, 这里的超收敛现象出现在每个子区间上. 其超收敛点的局部坐标实际上是某个函数的零点, 且这类函数是 Clausen 函数的一些组合形式.

下面简要介绍超奇异积分的超收敛结论, 内容主要基于文献 [22,46]. 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为区间 $[a, b]$ 上步长为 $h = (b-a)/n$ 的一致剖分. 为了构造 k 次分片 Lagrange 插值多项式, 在每个子区间上再作一致剖分

$$x_i = x_{i0} < x_{i1} < \cdots < x_{ik} = x_{i+1}.$$

定义从参考元 $[-1, 1]$ 到子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的线性变换

$$x = \hat{x}_i(\tau) := \frac{(\tau+1)(x_{i+1}-x_i)}{2} + x_i, \quad \tau \in [-1, 1]$$

和分片 Lagrange 插值多项式

$$\mathcal{F}_{kn}(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_{ij}) \frac{l_{ki}(x)}{(x-x_{ij}) l'_{ki}(x_{ij})}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{3.28}$$

其中

$$l_{ki}(x) = \sum_{j=0}^{k} (x - x_{ij}).$$

用 $\mathcal{F}_{kn}(x)$ 替代二阶超奇异积分中的 $f(x)$ 便得到 Newton-Cotes 公式

$$\mathcal{Q}_{kn}(s, f) := \int_a^b \frac{\mathcal{F}_{kn}(x)}{(x-s)^2} dx = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \omega_{ij}^{(k,1)}(s) f(x_{ij}) = \int_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2} dx - \mathcal{E}_{kn}(s, f), \tag{3.29}$$

其中 $\mathcal{E}_{kn}(f)$ 为误差泛函, $\omega_{ij}^{(k,1)}(s)$ 为 Cotes 系数

$$\omega_{ij}^{(k,1)}(s) = \frac{1}{l'_{ki}(x_{ij})} \int_a^b \frac{1}{(x-s)^2} \prod_{m=0, m\neq j}^{k} (x - x_{im})\, dx. \tag{3.30}$$

对复化梯形公式和 Simpson 公式, 即 $\mathcal{Q}_{kn}(f)$ $(k = 1, 2)$, Linz [20] 给出了误差分析为

$$|\mathcal{E}_{kn}(s, f)| \leqslant C\gamma^{-2}(\tau) h^k, \quad k = 1, 2, \tag{3.31}$$

其中

$$\gamma(\tau) = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} \frac{|s - x_i|}{h} = \frac{1-|\tau|}{2}. \tag{3.32}$$

该估计表明, 其精度依赖于因子 $\gamma^{-2}(\tau)$, 当奇异点 s 位于某个区间中点时, 可以达到最优阶 $O(h)$; 当奇异点 s 逼近网格节点时, 误差由于 $\gamma^{-2}(\tau)$ 的影响将会趋向无穷.

对任意阶复化 Newton-Cotes 公式计算超奇异积分, 文献 [22] 给出了最优误差估计

$$|\mathcal{E}_{kn}^1(s, f)| \leqslant C |\ln \gamma(\tau)| h^{k+\alpha-1}. \tag{3.33}$$

在介绍 Newton-Cotes 公式的超收敛结果之前, 先引入如下记号. 定义

$$\mathcal{S}_k(\tau) := \psi'_k(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} [\psi'_k(-2i+\tau) + \psi'_k(2i+\tau)]. \tag{3.34}$$

令

$$\phi_k(\tau) = \prod_{j=0}^{k}(\tau - \tau_j) = \prod_{j=0}^{k}\left(\tau - \frac{2j-k}{k}\right), \tag{3.35}$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle⨍_{-1}^{1}\frac{\phi_k(\tau)}{\tau - x}\,d\tau, & |x| < 1, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\phi_k(\tau)}{\tau - x}\,d\tau, & |x| > 1. \end{cases} \tag{3.36}$$

根据求导定义可知,

$$\psi_k'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle⨎_{-1}^{1}\frac{\phi_k(\tau)}{(\tau - x)^2}\,d\tau, & |x| < 1, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\phi_k(\tau)}{(\tau - x)^2}\,d\tau, & |x| > 1. \end{cases} \tag{3.37}$$

复化 Newton-Cotes 公式超收敛性结果如下.

定理 1 设 $f(x) \in C^{k+1+\alpha}[a,b]$, $0 < \alpha \leqslant 1$ 且 τ^* 为定义于 (3.34) 的函数 $\mathcal{S}_k(\tau)$ 的零点, 则对于计算二阶超奇异积分的复化 Newton-Cotes 公式 $\mathcal{Q}_{kn}(f)$, 在点 $s = \hat{x}_i(\tau^*)$ 处, 当 k 为奇时,

$$|\mathcal{E}_{kn}(s,f)| \leqslant C[1 + \eta_1(s)h^{1-\alpha}]h^{k+\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1; \tag{3.38}$$

当 k 为偶时,

$$|\mathcal{E}_{kn}(s,f)| \leqslant \begin{cases} C[1 + \eta_1(s)h^{1-\alpha}]h^{k+\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ C[\eta_1(s) + |\ln h|]h^{k+1}, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{3.39}$$

其中

$$\eta_1(s) = \max\{(b-s)^{-1}, (s-a)^{-1}\}. \tag{3.40}$$

详细证明过程见文献 [22]. 近年来, 对超奇异积分超收敛的研究取得了较多的进展, 对于区间上三阶超奇异积分超收敛的结果见文献 [47], 圆周上超奇异积分的超收敛结果见文献 [46].

3.2.4 外推法

用外推法来加速收敛的技巧已经广泛应用到计算数学的各个领域[48]. 基于多项式插值和有理函数的外推法已有很好的理论研究, 其中较为著名的是 Richardson 外推法和 Romberg 外推法, 其误差函数为

$$T(h) - a_0 = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \cdots,$$

其中 $T(0) = a_0$, a_j 为与 h 无关的常数. Richardson 通过两个不同的网格消掉 h^2 项, 因此也称为 "h^2-外推". 文献 [48] 成功地将该方法用于积分方程和微分方程的求解. 但是对于超奇异积分的外推算法, 相应的研究文献相对较少.

下面给出关于梯形公式计算区间上超奇异积的误差展开式, 设区间 $[a,b]$ 上步长为 $h = \frac{b-a}{n}$ 的一致剖分为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 定义 $f_L(x)$ 为

$$f_L(x) = \frac{x - x_j}{h}f(x_{j+1}) + \frac{x_{j+1} - x}{h}f(x_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{3.41}$$

进一步, 定义线性变换

$$x = \hat{x}_j(\tau) := \frac{(\tau+1)}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j, \quad \tau \in [-1,1], \tag{3.42}$$

将子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 变换到单位区间 $[-1,1]$. 将 $f(x)$ 用 (3.41) 中的 $f_L(x)$ 替换得到复化梯形公式

$$\mathcal{Q}_{1n}(f,s) = \fint_a^b \frac{f_L(x)}{(x-s)^2}dx = \sum_{j=0}^{n}\omega_j(s)f(x_j) = \fint_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}dx - \mathcal{E}_{1n}(s,f), \tag{3.43}$$

其中 $\omega_j(s)$ 为解析计算的 Cotes 系数 [20,21], 误差函数定义为

$$\mathcal{E}_{1n}(s,f) = \fint_a^b \frac{f(x)}{(x-s)^2}dx) - \fint_a^b \frac{f_L(x)}{(x-s)^2}dx.$$

设

$$F_i(\tau) = (\tau-1)(\tau+1)[(\tau+1)^i - (\tau-1)^i], \tag{3.44}$$

$$\phi_{i,i+1}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\fint_{-1}^{1}\frac{F_i(\tau)}{\tau-t}d\tau, & |t|<1, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{F_i(\tau)}{\tau-t}d\tau, & |t|>1. \end{cases} \tag{3.45}$$

众所周知, 如果 $F_i(\tau)$ 为第一类 Legendre 多项式, 那么, $\phi_{i,i+1}$ 就是第二类 Legendre 函数 [49]. 定义

$$\phi_{ii}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\fint_{-1}^{1}\frac{F_i(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, & |t|<1, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{F_i(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, & |t|>1, \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\phi_{ik}(t) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{F_i(\tau)(\tau-t)^{k-i-2}}{(k-i)!}d\tau, \quad k>i+1. \tag{3.47}$$

定理 2 假设 $f(x)\in C^l[a,b], l\geqslant 2$. 对定义为 (3.43) 的复化梯形公式 $\mathcal{Q}_{1n}(f,s)$, 存在一个与 h 和 s 无关的正数 C, 以及与 h 无关的函数 $a_i(\tau)$, 有

$$\mathcal{E}_{1n}(s,f) = \sum_{i=1}^{l-1}\frac{h^i}{2^i}f^{(i+1)}(s)a_i(\tau) + \mathcal{R}_n(s), \tag{3.48}$$

其中 $s = x_m + (1+\tau)h/2$, 且

$$|\mathcal{R}_n(s)| \leqslant C(\gamma^{-1}(\tau) + |\ln h|)h^{l-1}.$$

定理 2 的证明过程见文献 [37], 于是, 我们得到如下的误差展开式:

$$\mathcal{E}_{1n}(s,f) = \sum_{i=1}^{l-1}\frac{h^i}{2^i}f^{(i+1)}(s)a_i(\tau) + O(h^{l-1}), \tag{3.49}$$

其中 $a_i(\tau)$ 为与 h 无关的函数, τ 为奇异点 s 所对应的局部坐标. 基于该误差展开式, 我们提出相应的外推算法. 假设存在整数 n_0 使得

$$m_0 := \frac{n_0(s-a)}{b-a}$$

是一个整数. 首先, 将区间 $[a,b]$ 等分成 n_0 个子区间, 记为 Π_1, 其步长为 $h_1 = \frac{b-a}{n_0}$; 然后对 Π_1 再次加密得到 Π_2, 其步长为 $h_2 = \frac{h_1}{2}$; 依次重复这个过程, 得到序列 $\{\Pi_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$, 其中 Π_j 由 Π_{j-1} 加密得到, 步长为 h_j. 由此得到外推算法, 对于给定 $\tau\in(-1,1)$, 定义逼近序列

$$s_j = s + \frac{\tau+1}{2}h_j, \quad j=1,2,\ldots \tag{3.50}$$

和

$$T(h_j) = I_{2^{j-1}n_0}(f, s_j). \tag{3.51}$$

于是得到外推算法步骤如下:

(1) 计算

$$T_1^{(j)} = T(h_j), \quad j = 1, \ldots, m;$$

(2) 计算

$$T_i^{(j)} = T_{i-1}^{(j+1)} + \frac{T_{i-1}^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j)}}{2^{i-1} - 1}, \quad i = 2, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, m - i.$$

对于给定的局部坐标 τ, 选取一个序列 s_j 来逼近奇异点 s, 这样我们不但可以得到要求的精度, 而且还可以得到相应的后验误差估计.

圆周上超奇异积分基于有限部分积分定义的外推算法参见文献 [50], 区间上超奇异积分基于奇异分离定义的外推的算法参见文献 [51].

4 数值算例

本节用外推法近似计算如下区间上的超奇异积分来检验外推法的有效性.

例 1 考虑区间上的超奇异积分

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{(x - s)^2} dt = 4s^2 + 2s + \frac{4}{3} + \frac{s + 1}{s(s - 1)} + 4s^3 \log \frac{1 - s}{s}. \tag{4.1}$$

设奇异点 $s = 0.25, 0.9$. 选取如下逼近序列:

$$s_j = s + \frac{(\tau + 1)h_j}{2},$$

其中 $\tau = 0, \pm\frac{2}{3}$, s_j 定义见 (3.50).

在表 1 和 2 中, 我们分别给出基于梯形公式近似计算超奇异积分 $s = 0.25$ 和 $s = 0.9$ 的外推值. 在表 3 和 4 中, 梯形公式的外推的收敛阶分别为 h, h^2 和 h^3, 这与我们的理论分析相吻合; 在表 5 和 6 中, 我们得到相应的后验误差估计的收敛阶为 h, h^2 和 h^3, 与理论分析一致. 通过表 7, 我们知道, 不论局部坐标取值是否相同, 所得到的收敛阶都是 $O(h)$.

表 1 当 $s = 0.25$ 时, 外推法近似计算超奇异积分近似值

	$\tau = -2/3$	h^2-extra	h^3-extra
32	−4.427994656		
64	−4.470949523	−4.513904391	
128	−4.492714408	−4.514479293	−4.514670927
256	−4.503668423	−4.514622438	−4.514670154
512	−4.509163295	−4.514658166	−4.514670075

表 2 当 $s=0.9$ 时, 外推法近似计算超奇异积分近似值

	$\tau=-2/3$	h^2-extra	h^3-extra
100	$-2.155840392\text{e}+1$		
200	$-2.134963330\text{e}+1$	$-2.114086269\text{e}+1$	
400	$-2.124676207\text{e}+1$	$-2.114389083\text{e}+1$	$-2.114490022\text{e}+1$
800	$-2.119569985\text{e}+1$	$-2.114463763\text{e}+1$	$-2.114488657\text{e}+1$
1600	$-2.117026146\text{e}+1$	$-2.114482307\text{e}+1$	$-2.114488488\text{e}+1$

表 3 当 $s=0.25$ 时, 外推法近似计算超奇异积分的误差

	$\tau=-2/3$	h^2-extra	h^3-extra
32	$-8.667540960\text{e}-2$		
64	$-4.372054216\text{e}-2$	$-7.656747194\text{e}-4$	
128	$-2.195565741\text{e}-2$	$-1.907726621\text{e}-4$	$8.613570168\text{e}-7$
256	$-1.100164219\text{e}-2$	$-4.762696573\text{e}-5$	$8.826638886\text{e}-8$
512	$-5.506770788\text{e}-3$	$-1.189938672\text{e}-5$	$9.806290002\text{e}-9$

表 4 当 $s=0.9$ 时, 外推法近似计算超奇异积分的误差

	$\tau=-2/3$	h^2-extra	h^3-extra
100	$4.135192716\text{e}-1$		
200	$2.047486574\text{e}-1$	$-4.021956765\text{e}-3$	
400	$1.018774233\text{e}-1$	$-9.938107202\text{e}-4$	$1.557129472\text{e}-5$
800	$5.081520627\text{e}-2$	$-2.470107994\text{e}-4$	$1.922507508\text{e}-6$
1600	$2.537681635\text{e}-2$	$-6.157357297\text{e}-5$	$2.388358382\text{e}-7$

表 5 当 $s=0.25$ 时, 外推法近似计算超奇异积分的后验误差

	后验误差	h^2- 后验误差	h^3- 后验误差
32			
64	$-4.295486744\text{e}-2$		
128	$-2.176488475\text{e}-2$	$-1.916340191\text{e}-4$	
256	$-1.095401522\text{e}-2$	$-4.771523212\text{e}-5$	$-1.104415183\text{e}-7$
512	$-5.494871401\text{e}-3$	$-1.190919300\text{e}-5$	$-1.120858555\text{e}-8$

表 6 当 $s=0.9$ 时, 外推法近似计算超奇异积分的后验误差

	后验误差	h^2- 后验误差	h^3- 后验误差
100			
200	$-2.087706142\text{e}-1$		
400	$-1.028712341\text{e}-1$	$3.028146045\text{e}-3$	
800	$-5.106221707\text{e}-2$	$7.467999207\text{e}-4$	$-1.364878721\text{e}-5$
1600	$-2.543838992\text{e}-2$	$1.854372264\text{e}-4$	$-1.683671670\text{e}-6$

表 7　当 $s=0.9$ 时, 逼近序列 $s_j=s+(\tau+1)h_j/2$ 近似计算超奇异积分的误差

	$\tau=-2/3$	$\tau=2/3$	$\tau=0$
100	4.135192716e−1	2.200095045e + 0	1.345661969e + 0
200	2.047486574e−1	1.055159313e + 0	6.570399556e−1
400	1.018774233e−1	5.170413867e−1	3.247134719e−1
800	5.081520627e−2	2.559654336e−1	1.614220085e−1
1600	2.537681635e−2	1.273534599e−1	8.047938958e−2

5　展望

由于边界元方法具有将问题降低一维处理的优越性, 已经广泛应用于无界区域问题如电磁散射、弹性力学、断裂力学和计算生物学等众多科学计算领域中, 将来的发展会更加迅猛, 应用范围也将更加广泛. 该方法的理论研究还落后于实际应用. 因此, 今后我们将着力于以下几方面的研究工作:

(1) 对超奇异积分方程进行数值求解时, 结合超收敛的结果, 研究其误差分析;

(2) 对于实际问题中的二维和三维问题, 构造有效的数值求积方法;

(3) 对分数阶偏微分方程中出现的一些分数阶超奇异积分, 构造相应的数值方法, 进行数值计算和理论研究;

(4) 建立工程界适用而经济的程序包.

参考文献

1 冯康. 冯康文集. 北京: 国防工业出版社, 1993

2 余德浩. 自然边界元方法的数学理论. 北京: 科学出版社, 1993

3 韩厚德, 巫孝南. 人工边界方法 - 无界区域上的偏微分方程数值解. 北京: 清华大学出版社, 2009

4 Keller J B, Givoli D. Exact no-reflectiong boundary conditions. J Comput Phys, 1989, 82: 172–192

5 杜庆华, 岑章志, 嵇醒, 等. 边界积分方程边界元法. 北京: 高等教育出版社, 1989

6 Yu D H. Natural Boundary Integrals Methods and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002

7 祝家麟, 袁政强. 边界元分析. 北京: 科学出版社, 2009

8 Yu D H. Approximation of boundary conditions at infinity for a harmonic equation. J Comp Math, 1985, 3: 219–227

9 Yu D H, Wu J M. A nonoverlapping domain decomposition method for exterior 3-D problem. J Comput Math, 2001, 19: 77–86

10 余德浩. 无界区域上 Stokes 问题的自然边界元与有限元耦合法. 计算数学, 1992, 14: 371–378

11 余德浩. 无界区域上基于自然边界归化的一种区域分解算法. 计算数学, 1995, 17: 95–105

12 余德浩. 有限元与自然边界元交替的区域分解算法. 第 4 届全国边界元会议论文集. 南京: 河海大学出版社, 1994, 1–5

13 Chen J T, Hong H K. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integral and divergent series. Appl Mech Rev, 1999, 52: 17–33

14 Hui C Y, Shia D. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature. Internat J Numer Methods Engrg, 1999, 44: 205–214

15 Monegato G. Numerical integration schemes for the BEM solution of hypersingular integral equations. Internat J Numer Methods Engrg, 1999, 45: 1807–1830

16 Paget D F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals. Numer Math, 1981, 36: 447–453

17 Sun W W, Wu J M. Interpolatory quadrature rules for Hadamard finite-part integrals and their superconvergence. IMA J Numer Anal, 2008, 28: 580–597

18 Tsamasphyros G, Dimou G. Gauss quadrature rules for finite part integrals. Internat J Numer Methods Engrg, 1990, 30: 13–26

19 Du Q K. Evaluations of certain hypersingular integrals on interval. Internat J Numer Methods Engrg, 2001, 51: 1195–1210
20 Linz P. On the approximate computation of certain strongly singular integrals. Computing, 1985, 35: 345–353
21 Wu J M, Sun W W. The superconvergence of the composite trapezoidal rule for Hadamard finite part integrals. Numer Math, 2005, 102: 343–363
22 Wu J M, Sun W W. The superconvergence of Newton-Cotes rules for the Hadamard finite-part integral on an interval. Numer Math, 2008, 109: 143–165
23 Yu D H. The numerical computation of hypersingular integrals and its application in BEM. Adv Engrg Software, 1993, 18: 103–109
24 Zhang X P, Wu J M, Yu D H. The Superconvergence of composite trapezoidal rule for Hadamard finite-part integral on a circle and its application. Int J Comput Math, 2010, 87: 855–876
25 Zhang X P, Wu J M, Yu D H. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications. J Comput Appl Math, 2009, 223: 598–613
26 李金, 余德浩. 牛顿科茨公式计算超奇异积分的误差估计. 计算数学, 2011, 31: 77–87
27 Choi U J, Kim S W, Yun B I. Improvement of the asymptotic behaviour of the Euler-Maclaurin formula for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. Internat J Numer Methods Engrg, 2004, 61: 496–513
28 Elliott D. Sigmoidal transformations and Euler-Mauclaurin expansion for evaluating certain Hadamard finite-part integrals. Numer Math, 1997, 77: 453–465
29 Elliott D. The Euler-Maclarin formula revisited. J Aust Math Soc, 1998, 40: 27–76
30 Elliott D. Sigmoidal-trapezo idal quadrature for ordinary and Cauchy principal value integrals. ANZIAM J, 2004, 46: 1–69
31 Hasegawa T. Uniform approximations to finite Hilbert transform and its derivative. J Comput Appl Math, 2004, 163: 127–138
32 Kim P, Jin U C. Two trigonometric quadrature formulae for evaluating hypersingular integrals. Internat J Numer Methods Engrg, 2003, 6: 469–486
33 Kress R. On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory. J Comp Appl Math, 1995, 50: 345–360
34 Wu J M, Dai Z H, Zhang X P. The superconvergence of the composite midpoint rule for the finite-part integral. J Comput Appl Math, 2010, 233: 1954–1968
35 Yu D H. The approximate computation of hypersingular integrals on interval. Numer Math J Chinese Univ, 1992, 1: 114–127
36 余德浩. 圆周上超奇异积分计算及其误差估计. 高等学校计算数学学报, 1994, 16: 332–339
37 Li J, Wu J M, Yu D H. Generalized extrapolation for computation of hypersingular integrals in boundary element methods. Comput Model Eng Sci, 2009, 42: 151–175
38 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New York: Dover Publications, 1952
39 Vainikko G M, Lifanov I K. On the notion of the finite part of divergent integrals in integral equations. Differ Eq, 2002, 38: 1313–1326
40 Monegato G. Definitions, properties and applications of finite part integrals. J Comp Appl Math, 2009, 229: 42–439
41 DeKlerk J. Cauchy Principal Value and Hypersingular Integrals. Potchefstroom: North West University, 2011
42 Ioakimidis N I. On the numerical evaluation of derivatives of Cauchy priciple value integrals. Computing, 1982, 27: 81–88
43 Ioakimidis N I. On the uniform convergence of Gaussian quadrature rules for Cauchy priciple value integrals and their derivatives. Math Comp, 1985, 44: 191–198
44 邬吉明, 余德浩. 区间上超奇异积分的一种近似计算方法. 数值计算与计算机应用, 1998, 19: 118–126
45 Wu J M, Lv Y. A superconvergence result for the second-order Newton-Cotes formula for certain finite-part integrals. IMA J Numer Anal, 25 2005, 25: 253–263
46 Zhang X P, Wu J M, Yu D H. The superconvergence of composite Newton-Cotes rules for Hadamard finite-part integral on a circle. Computing, 2009, 85: 219–244
47 Li J, Zhang X P, Yu D H. Superconvergence and ultraconvergence of Newton-Cotes rules for supersingular integrals. J Comput Appl Math, 2010, 233: 2841–2854
48 Sidi A. Practical Extrapolation Methods Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
49 Andrews G E, Askey R, Roy R. Special Functions of Mathematics and Engineers. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Inc, 1999

50 Li J, Zhang X P, Yu D H. Extrapolation methods to compute hypersingular integral in boundary element methods. Sci China Math, 2013, 56: 1647–1660
51 Huang J, Wang Z, Zhu R. Asymptotic error expansions for hypersingular integrals. Adv Comput Math, 2013, 38: 257–279

Numerical methods to compute hypersingular integral in boundary element methods

LI Jin & YU DeHao

Abstract The computation of hypersingular integral is one of the important subjects in boundary element methods especially in natural boundary element methods. Classical numerical methods such as Gauss methods, Newton-Cotes methods cannot be used to approximate the hypersingular integral directly. In this paper, we introduce the numerical methods such as Gauss methods, Newton-Cotes methods, S transformation methods and extrapolation methods which are based on different definitions; then we mainly present the results of Newton-Cotes methods and extrapolation methods which are used to compute the hypersingular integral.

Keywords natural boundary element methods, hypersingular integral, error functional, Newton-Cotes methods

MSC(2010) 35S15, 65M38

doi: 10.1360/N012014-00200