全局 DEA 模型研究 *

谢艾国 罗 英 王应明
厦门大学自动化系, 361005

摘 要 在传统 DEA 的基础上提出了全局 DEA 模型, 该模型不仅克服了传统 DEA 的局限性, 而且以整体效率最优为出发点来优化决策单元的投入和产出分量。案例分析表明此模型切实可行, 拓宽了 DEA 的应用。

主题词 数据分析 效率 决策分析

Studies on Global Data Envelopment Analysis Model

Xie Aiguo Luo Ying Wang Yingming
Department of Automation, Xiamen University, 361005

Abstract In this paper we produce a global data envelopment analysis model which overcomes the limitations of traditional DEA and optimizes the components of inputs and outputs from the optimum view of the global efficiency of decision-making unit. The applications show that the model is practical, and it enriches the system of DEA.

Keywords Data envelopment analysis DEA Efficiency evaluation

1 引 言

传统的 DEA (Data Envelopment Analysis) 模型在研究具有相同类型投入产出的若干决策部门相对有效性时有其局限性[1]。首先, 传统 DEA 的相对效率指数在数值上仅与无松弛的投入和产出有关, 而与有松弛的要素无关; 其次, 传统 DEA 要求对投入或产出的各个要素按同一比例增加或者减少, 由于多方面因素的限制, 这在实际中是不现实的, 李光金等人在文献[1] 中对此作了详细的论述, 并在文献[2] 中提出了基于多目标决策的 DEA 模型。该模型能将投入和产出尽量逼近生产前沿面, 估计决策单元相对的最高效率、平均效率和最低效率, 并直接判断其相对有效性; 然而, 此模型不能总揽全局, 从整体上优化各个决策单元, 而且此模型过于复杂, 可操作性差, 在应用中受到许多限制, 例如对输入和输出指标的不可控因素处理无能为力。全局 DEA 模型 (Global Data Envelopment Analysis, GDEA) 不仅能克服传统 DEA 模型的局限性, 而且在决策单元的效率评估和非有效决策单元的投影控制方面能以整体最优为出发点来优化各个决策单元的投入和产出分量, 并且此模型简单实用, 可操作性强。

2 全局 DEA 模型

设有 n 个决策单元 DMU_j ($1 \leqslant j \leqslant n$), 投入向量为 $\boldsymbol{x}$, 产出向量为 $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}_j = (\boldsymbol{x}_{1j}, \boldsymbol{x}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{x}_{ij}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mj})$$

$$\boldsymbol{y}_j = (\boldsymbol{y}_{1j}, \boldsymbol{y}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{y}_{rj}, \cdots, \boldsymbol{y}_{sj}) \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $\boldsymbol{x}_{ij}$ 表示第 j 个单元第 i 种投入; $\boldsymbol{y}_{rj}$ 表示第 j 个单元的第 r 种产出。($\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$) 表示第 j 个决策单元 DMU_j 的投入、产出。若定义如下的生成可能集

$$T_G = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j, \ \boldsymbol{y} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_j,$$

* 国家自然科学青年基金资助课题

收稿日期: 1998 年 7 月 16 日

$$\lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n\} \qquad (1)$$

则从投入角度测算决策单元($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$)相对效率的全局 DEA 模型为下面的线性规划

$$(\mathrm{G})\begin{cases} \min \theta_k = V_{\mathrm{G}} \\ \mathrm{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_{ij} = \theta_{ik} \boldsymbol{x}_{ik}, \ i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_{rj} - s_r = \boldsymbol{y}_{rk}, \ r = 1, 2, \cdots, s \\ \theta_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \theta_{ik} \\ 0 \leqslant \theta_{ik} \leqslant 1, \ \lambda_j \geqslant 0, \ s_r \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2)$$

把模型(G)与基于生产可能集 T_{G} 的 $\mathrm{C^2R}$ 模型即(3)式[3]相比较

$$(\mathrm{D}_\varepsilon)\begin{cases} \min[\theta - \varepsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+)] \\ \mathrm{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_{ij} + s_i^- = \theta \boldsymbol{x}_{ik}, \ i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_{rj} - s_r^+ = \boldsymbol{y}_{rk}, \ r = 1, 2, \cdots, s \\ \lambda_j \geqslant 0, \ s_i^- \geqslant 0, \ s_r^+ \geqslant 0 \end{cases} \qquad (3)$$

显然, 模型(G)并不要求投入的各生产要素以相同的比例增大或减少, 即各投入要素可以根据实际需要自由调整。因而, 模型(G)比模型(D_ε)更有现实意义。

定理 1 设线性规划(G)的最优值为 V_{G}, 则 $V_{\mathrm{G}} = \theta_k^* \leqslant 1$, 并且当 $V_{\mathrm{G}} = 1$ 时, 有 $\theta_{ik}^* = 1(i = 1, 2, \cdots, m)$。

证明

(1) 由规划(G)的约束条件可知, 对于规划(G)的所有可行解 $\theta_k, \theta_{ik}, \lambda_i, s_r$ 都有 $0 \leqslant \theta_{ik} \leqslant 1$, 于是有 $\theta_k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_{ik} \leqslant 1$。因此, 规划(G)的最优值应同样满足 $V_G = \theta_k^* \leqslant 1$。

(2) 当 $V_{\mathrm{G}} = 1$ 时, 假设有某个 $\theta_{ik} < 1$, 则有

$$V_{\mathrm{G}} = \theta_k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_{ik} < 1$$

这与 $V_{\mathrm{G}} = 1$ 相矛盾, 因此只能有 $\theta_{ik}^* = 1(i = 1, 2, \cdots, m)$。

定义 1 称 $h_j = \theta_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$ 为第 j 个决策单元 DMU_j 的全局 DEA 效率评价指数。

由定理 1 可知, $0 \leqslant h_j \leqslant 1$。

定义 2 若规划(G)的任一最优解 θ_k^*, λ_j^*, s_r^* 均满足 $V_{\mathrm{G}} = \theta_k = 1$, $s_r = 0(r = 1, 2, \cdots, s)$, 则称 DMU_k 为全局 DEA 有效(GDEA 有效)。

定理 2 决策单元($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$)在规划(G)中 GDEA 有效等价于在规划(D_ε)中的 $\mathrm{C^2R}$ 有效。

证明

(1) 设 θ_k^*, λ_j^*, s_r^* 为规划(G)的最优解, 当决策单元($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$)为 GDEA 有效时, 根据定义 2 和定理 1 有

$\theta_{ik}^* = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$; $s_r^* = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, s)$

规划(G)的约束条件变为

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{ik}, \ i = 1, 2, \cdots, m \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = y_{rj}, \ r = 1, 2, \cdots, s \qquad (5)$$

令

$$\theta^* = \theta_{ik}^*, \ s_i^{-*} = 0, \ s_r^{+*} = s_r^* = 0$$

显然, θ^*, λ_j^*, s_r^{+*}, s_i^{-*} 是规划(D_s)的可行解。又因为 s_i^{-*}, s_r^{+*} 都不可能更大, θ^* 不可能更小, 否则 λ_j^* 就不满足(4)式和(5)式。同样, s_i^{-*}, s_r^{+*} 也不会更小(因为 $s_i^- \geqslant 0$, $s_r^+ \geqslant 0$), 因此, θ^*, λ_j^*, s_r^{+*}, s_i^{-*} 又是规划(D_ε)的最优解, 且满足 $s_i^{-*} = s_r^{+*} = 0$, $\theta^* = 1$, 最优目标值为 1。由 DEA 有效性的定义可知 DMU_k 为 DEA 有效($\mathrm{C^2R}$)。

(2) 设决策单元($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$)为 DEA 有效($\mathrm{C^2R}$), 则规划(D_ε)最优解为 θ^*, λ^*, $s_r^{-*} s_i^{+*}$, 且满足 $\theta^* = 1$, $s_r^{-*} = s_i^{+*} = 0$ 及(4)式和(5)式。显然

$$\lambda^*, \theta_{ik}^* = 1, s_r^* = 0, r = 1, 2, \cdots, s, i = 1, 2, \cdots, m$$

是规划(G)的最优解, 由定义 2 可知, 规划(G)为 GDEA 有效。

定理 3 决策单元($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$)在规划(G)中的全局效率 V_{G} 小于等于其在规划(D_ε)中的相对效率 V_{D}。

证明 设规划(D_ε)的最优解为

$$\theta^*, \lambda^*, s_r^{-*}, s_i^{+*}, r = 1, 2, \cdots, s, i = 1, 2, \cdots, m$$

可令

$$\theta_{ik} = \theta^* - \frac{s_i^{+*}}{x_{ik}}, \ s_r = s_r^{-*}$$

显然 θ^*, λ^*, s_r^{-*}, s_i^{+*} 使得 θ_{ik}, s_r, λ^* 是规划(G)的

可行解。设规划(G)的最优解为 θ_k^{**}, λ_j^{**}, s_r^{**}, 则有

$$\theta_k^{**} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_{ik} \tag{6}$$

把 $\theta_{ik} = \theta^* - \frac{s_i^{+*}}{x_{ik}}$ 代入(6)式, 得

$$\theta_k^{**} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{+*}}{x_{ik}} \leqslant \theta^*$$

即定理得证。

为了便于判断决策单元是否 GDEA 有效, 我们引入非阿基米德无穷小 ε, 构造如下的模型

$$(G_\varepsilon)\begin{cases}\min[\theta_k - \varepsilon\sum_{r=1}^{s} s_r] \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \boldsymbol{x}_{ij} = \theta_{ik}\boldsymbol{x}_{ik},\ i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \boldsymbol{y}_{rj} - s_r = \boldsymbol{y}_{rk},\ r = 1, 2, \cdots, s \\ \theta_k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_{ik} \\ 0 \leqslant \theta_{ik} \leqslant 1,\ \lambda_j \geqslant 0,\ s_r \geqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

定理 4　设规划(G_ε)的最优解为 θ_k^*, λ_j^*, s_r^*。若 $\theta_k^* = 1$ 且 $s_r^* = 0$, 则决策单元 DMU_k 为 GDEA 有效。

为了更好地阐明全局 DEA 模型的特点, 我们用此模型来评价我国 8 个沿海城市的独立核算工业企业经济效益, 原始数据见表 1[4]。然后, 比较投入型的传统 DEA 模型(C^2R)与全局 DEA 模型对决策单元作相对有效性分析的结果。

表 1 中, "产出 $\boldsymbol{y}_1$" 代表利税总额; "产出 $\boldsymbol{y}_2$" 代表工业总产值; "投入 $\boldsymbol{x}_1$" 代表固定资产原值; "投入 $\boldsymbol{x}_2$" 代表固定资产净值; "投入 $\boldsymbol{x}_3$" 代表定额流动资金平均余额。用规划(D_ε)和(G_ε)对它们进行有效性分析, 其结果分别见表 2 和表 3。

表 2 和表 3 表明, 决策单元的全局效率评价指数总是小于或等于它相应的 C^2R 模型的效率指数。这两种模型对决策单元的有效性评价是一致的, 即都能确定 DMU_4, DMU_5 是有效单元, 定理 2 说明了这一点。但这两种模型对非有效单元的排序有所变动。用 C^2R 模型进行评价, 其排序的结果是

$$DMU_{4,5} > DMU_3 > DMU_2 > DMU_8 > DMU_7 > DMU_1 > DMU_6$$

而用 GDEA 模型的规划(G_ε)评价, 其排序的结果是

$$DMU_{4,5} > DMU_3 > DMU_8 > DMU_2 > DMU_1 > DMU_7 > DMU_6$$

由此可见, 这两种模型对决策单元的评价虽然有所变动, 但是整个趋势是一致的。造成这种变动的原因是 GDEA 模型的全局效率指数考虑了投入的松弛变量, 因而比 C^2R 模型的效率指数更能真实地反映各决策单元之间的关系。

表 1　8 个 DMU 单元的原始投入产出数据

决策单元	投入 $\boldsymbol{x}_1$	投入 $\boldsymbol{x}_2$	投入 $\boldsymbol{x}_3$	产出 $\boldsymbol{y}_1$	产出 $\boldsymbol{y}_2$
大连	61.440	34.920	23.900	81.440	19.450
天津	159.400	102.100	51.580	229.900	53.820
青岛	39.670	25.070	14.130	68.280	15.320
上海	301.600	191.900	129.300	661.600	188.000
宁波	18.320	15.200	5.590	32.560	7.450
温州	6.130	4.370	2.250	8.039	1.070
福州	14.750	9.880	8.030	22.990	4.030
广州	71.080	43.490	31.000	122.600	27.560

表 2　用规划(D_ε)对决策单元进行有效性分析的结果

决策单元	θ	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_1^+	s_2^+
1	0.676	4.440	0.000	0.252	3.690	0.000
2	0.825	16.100	0.000	0.000	6.010	0.000
3	0.915	3.270	0.000	0.000	3.100	0.000
4	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.664	0.062	0.000	0.000	1.040	0.000
7	0.711	0.000	0.352	1.210	2.230	0.000
8	0.818	2.230	0.000	1.390	7.280	0.000

表 3　用规划(G_ε)对决策单元进行有效性分析的结果

决策单元	θ_{1k}	θ_{2k}	θ_{3k}	θ_k	s_1	s_2
1	0.604	0.676	0.666	0.649	3.690	0.000
2	0.658	0.653	0.871	0.727	11.510	0.000
3	0.785	0.790	0.944	0.840	4.080	0.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
6	0.598	0.534	0.698	0.610	1.210	0.000
7	0.711	0.675	0.560	0.648	2.230	0.000
8	0.786	0.818	0.773	0.792	7.280	0.000

3　全局 DEA 的投影分析

DEA 方法与其它评价方法相比,其特点是它不仅合理、确切地给出各评价单元(DMU)的相对有效性,且更重要的是给出 DMU 从非 DEA 有效到DEA 有效的改进方案,给决策者提供管理信息。

设模型规划(G_ε)的最优解为 θ_{ik}^*,θ_k^*,λ_j^*,s_r^*,令

$$\hat{x}_{ik}=\theta_{ik}^*\cdot x_{ik},\ i=1,2,\cdots,m$$

$$\hat{y}_{rk}=y_{rk}+s_r^*,\ r=1,2,\cdots,s$$

称($\hat{x}_k$, $\hat{y}_k$)为 DMU_k 对应点(x_k, y_k)在有效生产前沿面上的投影。

定理 5　决策单元 DMU_k 对应点(x_k, y_k)在有效生产前沿面上的投影($\hat{x}_k$, $\hat{y}_k$)相对于原来的 n 个 DMU 来说是 GDEA 有效的。

我们仍以表 1 中的数据为例,来研究各决策单元分别在模型(G_ε)和模型(D_ε)下的投影。从表 3 中可知,DMU_4、DMU_5 为有效单元,其它为非有效单元。投影结果见表 4 和表 5。

比较表 4 和表 5 的数据,显然,尽管在 C^2R 模型和 GDEA 模型下都能确定 DMU_4、DMU_5 为有效单元,但是各个非有效单元在这两个模型下的投影并不尽相同。这是由于决策单元在这两个模型下的投影路径不同造成的。在 C^2R 模型下,

表 4　在 GDEA 模型下的投影结果

决策单元	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
1	37.13	23.62	15.92	85.13	19.45
2	104.80	66.70	44.90	241.40	53.82
3	31.13	19.80	13.30	72.40	15.32
6	3.67	2.33	1.57	9.25	1.07
7	10.50	6.67	4.50	25.22	4.30
8	55.90	35.60	24.00	129.90	27.56

表 **5**　在 $\mathbf{C^2R}$ 模型下的投影结果

决策单元	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
1	37.13	23.62	15.92	85.13	19.45
2	115.40	84.20	42.60	235.90	53.92
3	33.03	22.94	12.93	71.40	15.32
6	4.07	2.90	1.49	9.08	1.07
7	10.50	6.67	4.50	25.22	4.30
8	55.90	35.60	24.00	129.90	27.56

非决策单元以线性方式投影的,即先将所有投入(或产出)以同一比例缩小,然后分别增加各个投入分量(或减少各个产出分量);而在 GDEA 模型下,则是直接将各个分量以不同的比例压缩,以最优方式投影到生产前沿面上。此外,在 GDEA 模型下的投影的投入量,除分量 $\hat{x}_3$ 略大于在 C^2R 模型下的投入分量外,其余的投入分量都小于后者的投入分量,且在 GDEA 模型下的投影的产出量都大于在 C^2R 模型下的产出量。假设各投入分量的权重相等,将所有投入量和产出量分别相加,显然在 GDEA 模型下的投影,其投入量比在 C^2R 模型下的减少了,但是其产出量反而增加了。可见,从投影控制优化角度来说,GDEA 模型优于 C^2R 模型。这是因为 GDEA 模型是从各个分量的压缩效率之和(即全局 DEA 效率评价指数)来优化各个决策单元的;而 C^2R 模型则仅从各分量的可同一压缩程度来优化各个决策单元的效率的。

4　结束语

本文针对传统 DEA 模型在评估同类型决策单元效率方面存在的局限性,提出了全局 DEA 模型。分析表明由于全局 DEA 模型是从各个分量的压缩效率之和(即全局 DEA 效率评价指数)来优化各个决策单元的,而传统 DEA 模型则仅从各分量的可同一压缩程度来优化各个决策单元的效率的,因此全局 DEA 模型在决策单元的效率评估和非有效决策单元的投影控制方面比传统的 DEA 模型优越。最后,本文通过案例分析,对上述理论作了进一步的阐明。理论和实践表明,全局 DEA 模型是切实可行的,拓宽了 DEA 的应用。

参　考　文　献

1　李光金,刘永清. DEA 有效决策单元判断及排序的新方法. 系统工程理论与实践, 1996, 15(8): 37～42.

2　李光金,刘永清. 基于多目标规划的 DEA. 系统工程理论与实践, 1997, 17(3): 16～22.

3　魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法. 中国人民大学出版社, 1988.

4　国家统计局. 中国统计年鉴(1986). 中国统计出版社, 1986, 10: 75～76.