第 38 卷　第 1 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 38　No. 1
1999 年 1 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jan. 1999

Johnson 算法的极大极小代数证明[1]

彭　洪　张阿卜
(厦门大学自动化系　厦门　361005)

摘要　通过极大极小代数的方法对串行生产线进行建模, 并给出了 Johnson 算法的严格证明.

关键词　离散事件动态系统, Johnson 算法, 极大极小代数
中国图书分类号　TP 11

离散事件动态系统(Discrete Event Dynamic System, 简称 DEDS) 是一种特殊的、复杂的系统, 比如生产加工系统. 主要特点表现在: 1) 离散性; 2) 异步并发性; 3) 随机性; 4) 动态性. 它的进程是由发生在离散时刻的事件所驱动的, 并且事件之间存在着复杂的相互作用关系, 因而这种系统运行规律, 很难用通常的微分方程和差分方程来准确描述. 法国学者 Cohen 将极大极小代数方法应用于对离散事件系统的研究, 这对于对系统特性的研究和对系统运行规律的准确描述, 是十分有意义的, 将为该系统的分析、设计优化提供重要的依据和基础.

在调度问题中, Johnson 算法成功地解决了 Flow Shop 问题中的 $n/m/F/F\max(m=2)$ 问题, 而 $n/m/F/F\max(m>2)$ 就是一个 NP 难题, 因此 Johnson 算法在事实上提供了一个解决诸如 $n/m/F/F\max$, 乃至 $n/m/G/F\max$ 等 Flow Shop 或 Job Shop 问题的辅助方案. 本文应用极大代数的方法证明了 Johnson 算法的正确性, 同时也为对更复杂的问题研究采用极大代数方法起到抛砖引玉的作用.

1　极大代数上串行生产线的模型

首先, 我们简单地介绍一下极大代数.

令 R 表示实数域, $\bar{R}=R\cup\{-\infty\}$, 在 $\bar{R}$ 上定义加法 "$\oplus$" 和乘法 "$\odot$", 令

$$a\odot b=a+b \qquad \forall a,b\in\bar{R}$$

$$a\oplus b=\max(a,b) \qquad \forall a,b\in\bar{R}$$

其中 "max", "+" 表示通常意义下的取极大和加法, "$\odot$" 可省略或表示为 " ".

不难证明, 运算 "$\oplus$", "$\odot$" 满足结合律, 交换律和分配律. 令 $e=0$, $\epsilon=-\infty$, 则对 $\forall a,b\in\bar{R}$ 有: $e\odot a=a$, $\epsilon\oplus a=a$, $a\odot\epsilon=\epsilon$, 因此, e,ϵ 可看作是单位元素 "1" 和零元素 "0".

在 $\bar{R}$ 上规定了如上的运算 "$\oplus$", "$\odot$" 后, $\bar{R}$ 称为一个极大代数.

类似可以定义 $\bar{R}$ 上的向量, 矩阵以及向量的数乘和加法, 以及矩阵的乘法.

[1] 本文 1998-01-15 收到;　福建省自然科学基金资助项目

另外, 我们引进运算 “$\bar{\oplus}$”:

$$a \,\bar{\oplus}\, b = \min(a, b) \qquad \forall\, a, b \in \bar{R}$$

其中 “min” 表示通常意义下的取极小.

下面的性质是显然的.

性质 1　$\forall\, a, b \in \bar{R}$, 有 $a \oplus b = a \Leftrightarrow a \,\bar{\oplus}\, b = b$.

性质 2　$\forall\, a, b, c \in \bar{R}$, 有

1) $b \geq c \Rightarrow a \oplus b \geq a \oplus c$;

2) $a \odot b \geq a \odot c \Leftrightarrow b \geq c$;

3) $a \geq b, c \geq b$ 则: $a \,\bar{\oplus}\, c \geq b$.

类似还有很多性质, 实质上就是 “max”, “min” 运算的性质, 在此就不一一列举了.

下面考虑串行生产线的状态方程表示. 串行生产线如图 1 所示.

$$\cdots J_K, \cdots, J_2, J_1 \to \overset{M_1}{\bigcirc} \to \square \to \overset{M_2}{\bigcirc} \to \square \to \cdots \to \overset{M_m}{\bigcirc} \to$$

图 1　串行生产线示意图

Fig. 1　Serial production line

生产线由 m 台机器组成, 工件 $J_1, J_2, \cdots\cdots$ 依次进入 $M_1, M_2, \cdots\cdots$, 诸机器加工, 即每个工件在机器上加工的次序为 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_m$, 而每台机器对工件的加工次序也皆相同, 为 $J_1, J_2, \cdots, J_k, \cdots$. 并假定每个机器前的存贮空间无限大.

假定 $P_i[K]$ 为机器 M_i 对工件 J_K 的加工时间, 设 $X_i[K]$ 为工件 J_K 在机器 M_i 上加工完成后离开的时刻, 不难看出, 有

$$X_1[K+1] = P_1[K+1]X_1[K]$$

$$\begin{aligned} X_i[K+1] &= P_i[K+1]X_{i-1}[K+1] \oplus P_i[K+1]X_i[K] \\ &= P_{1,2\cdots i}[K+1]X_1[K] \oplus P_{2\cdots i}[K+1]X_2[K] \oplus \cdots \oplus P_i[K+1]X_i[K] \end{aligned}$$

其中 $P_{j\cdots i}[K+1] = \prod_{t=j}^{i} P_t[K+1], 1 \leq j \leq i$.

M_m 为输出机, 工件 J_K 离开生产线的时间作为输出 $y[K]$, 那么有

$$y[K] = X_m[K]$$

这样, 由上面讨论, 得到串行生产线的状态方程如下:

$$\begin{cases} X[K+1] = A[K+1]X[K] \\ y[K] = C[K]X[K] \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$A[K] = \begin{bmatrix} P_1[K] & & & \\ P_{12}[K] & P_2[K] & & \epsilon \\ P_{123}[K] & P_{23}[K] & P_3[K] & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_{12\cdots m}[K] & P_{2\cdots m}[K] & \cdots & \cdots P_m[K] \end{bmatrix}$$

$C[K] = [\epsilon, \epsilon, \cdots, \epsilon, e]$.

上述即为极大代数上串行生产线的模型.

2 $n/2/F/F\max$ 的 Johnson 算法

对于串行生产线, 若工件数为 n, 机器数为 2, 以系统最大流经时间 $F\max$ 为性能指标(求最小), 那么该 Flow Shop 问题即为 $n/2/F/F\max$.

此时该系统在极大代数上的状态方程同式(1), 其中 $A[K] = \begin{bmatrix} P_1[K] & \epsilon \\ P_{12}[K] & P_2[K] \end{bmatrix}$, $C[K] = [\epsilon, e]$.

定理 1 对于两台机器构成的串行生产线, 有

$$X_1[K] = \prod_{h=1}^{k} P_1[h]$$

$$X_2[K] = \sum_{h=1}^{k} \left(\prod_{g=1}^{h} P_1[g] \quad \prod_{g=h}^{k} P_2[g] \right)$$

该定理可由数学归纳法证明, 它给出了 $X_1[n]$ 和 $X_2[n]$ 的计算公式, 由式(1) 可知

$$F\max = y[n] = c[n] \quad X[n] = X_2[n] = \sum_{h=1}^{n} \left(\prod_{g=1}^{h} P_1[g] \quad \prod_{g=h}^{n} P_2[g] \right) \tag{2}$$

为了导出 $n/2/F/F\max$ 的最优排序—— Johnson 算法, 我们先介绍 Flow Shop 调度的一些概念和结论.

定义 1 如果某一调度, 使得对不同的机器, 工件的加工顺序也相同. 我们就称这样的调度为置换 Flow Shop 调度或简称为置换调度.

对于置换调度, 不仅工件在机器上加工的顺序一致, 而且对不同的机器, 加工工件的顺序也一样, 对于这样的调度, 正好吻合我们前面所介绍的极大代数串行生产线的状态方程描述. Flow Shop 问题有两个性质, 以下面引理形式给出.

引理 1 对于 $n/m/F/B$ 问题, B 为正则指标, 只需要考虑使前两台机器加工工件次序相同的调度.

引理 2 对于 $n/m/F/F\max$ 问题, 只需考虑在机器 M_{m-1} 和 M_m 上的加工工件次序相同的调度.

这样, 对于 $n/2/F/F\max$ 问题, 要求它的最优调度, 只需考虑它的置换调度.

下面引理对证明定理 2 是有用的.

引理 3 在极大代数 $\bar{R}$ 上, 对于 $\forall a, b, c, d \in \bar{R}$, 有

$$a \quad b \quad (c \oplus d) \geq c \quad d \quad (a \oplus b) \Leftrightarrow a \bar{\oplus} b \geq c \bar{\oplus} d$$

$$a \quad b \quad (c \oplus d) > c \quad d \quad (a \oplus b) \Leftrightarrow a \bar{\oplus} b > c \bar{\oplus} d$$

引理 4 对于 $\forall P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32} \in \bar{R}$, 若

1) $P_{11} \bar{\oplus} P_{22} \leq P_{21} \bar{\oplus} P_{12}$

2) $P_{21} \bar{\oplus} P_{32} \leq P_{22} \bar{\oplus} P_{31}$

3) $P_{21} \neq P_{22}$ 或 $P_{11} \bar{\oplus} P_{12} \bar{\oplus} P_{31} \bar{\oplus} P_{32} < P_{22}$

则 $P_{11} \bar{\oplus} P_{32} \leq P_{12} \bar{\oplus} P_{31}$

证　由 1)，有 $P_{11}\bar{\oplus}P_{22}\bar{\oplus}P_{32}\le P_{21}\bar{\oplus}P_{12}\bar{\oplus}P_{32}$; 由 2)，有 $P_{21}\bar{\oplus}P_{32}\bar{\oplus}P_{12}\le P_{22}\bar{\oplus}P_{31}\bar{\oplus}P_{12}$, 得到

$$(P_{11}\bar{\oplus}P_{32})\bar{\oplus}P_{22}\le(P_{12}\bar{\oplus}P_{31})\bar{\oplus}P_{22}.$$

设 $P_{11}\bar{\oplus}P_{32}> P_{22}$, 则 $P_{12}\bar{\oplus}P_{31}\ge P_{22}$, 即

$$P_{11}> P_{22}, P_{31}> P_{22}, P_{12}\ge P_{22}, P_{31}\ge P_{22},$$

我们有 $P_{11}\bar{\oplus}P_{22}\bar{\oplus}P_{31}\bar{\oplus}P_{32}\ge P_{22}$, 代入 1) 和 2) 中得到 $P_{22}\le P_{21}$ 及 $P_{21}\le P_{22}$, 有 $P_{21}= P_{22}$, 与 3) 矛盾, 故 $P_{11}\bar{\oplus}P_{32}\le P_{22}$. 所以有

$$P_{11}\bar{\oplus}P_{32}= (P_{11}\bar{\oplus}P_{32})\bar{\oplus}P_{22}\le(P_{12}\bar{\oplus}P_{31})\bar{\oplus}P_{22}\le P_{12}\bar{\oplus}P_{31}$$

引理证毕.

引理 5　对 $\forall P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{31}\in\bar{R}$, 若

$$P_{21}= P_{22}, \text{且 } P_{11}\bar{\oplus}P_{12}\bar{\oplus}P_{31}\bar{\oplus}P_{32}\ge P_{22}$$

则　$P_{11}\bar{\oplus}P_{22}= P_{21}\bar{\oplus}P_{12}. P_{21}\bar{\oplus}P_{32}= P_{22}\bar{\oplus}P_{31}.$

定理 2(Johnson 原则)　对于 $n/2/F/F\max$ 问题, 若不等式

$$P_1[i]\bar{\oplus}P_2[j]\le P_1[j]\bar{\oplus}P_2[i]$$

成立, 则存在一个最优调度使得工件 i 排在工件 j 之前; 如果等号成立, 则 i 排在 j 之前或之后均可.

证　设 $W= 1, 2, \cdots, n$ 为一个一般的排序, 即机器加工工件以 $J_1, J_2, \cdots, J_n$ 的顺序进行, 对应的性能指标为 $F\max$.

设排序 W' 是由 W 将工件 f 和工件 $f+1$ 对换后得到的排序, 它所对应的性能指标为 $F'\max$, 则由式(2), 有

$$\begin{aligned}F\max =& \sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{h=1}^{k}P_1[h]\quad\prod_{h=k}^{n}P_2[h]\Big)=\sum_{k=1}^{f-1}\Big(\prod_{h=1}^{k}P_1[h]\quad\prod_{h=k}^{n}P_2[h]\Big)\oplus\\ &\sum_{k=f+2}^{n}\Big(\prod_{h=1}^{k}P_1[h]\quad\prod_{h=k}^{n}P_2[h]\Big)\oplus\prod_{h=1}^{f}P_1[h]\quad\prod_{h=f}^{n}P_2[h]\oplus\\ &\prod_{h=1}^{f+1}P_1[h]\quad\prod_{h=f+1}^{n}P_2[h]\end{aligned}$$

令　$$\Delta=\sum_{k=1}^{f-1}\Big(\prod_{h=1}^{k}P_1[h]\quad\prod_{h=k}^{n}P_2[h]\Big)\oplus\sum_{k=f+2}^{n}\Big(\prod_{h=1}^{k}P_1[h]\quad\prod_{h=k}^{n}P_2[h]\Big)$$

则有　$$\begin{aligned}F\max &= \Delta\oplus\prod_{h=1}^{f}P_1[h]\quad\prod_{h=f}^{n}P_2[h]\oplus\prod_{h=1}^{f+1}P_1[h]\quad\prod_{h=f+1}^{n}P_2[h]\\ &=\Delta\oplus\prod_{h=1}^{f-1}P_1[h]\quad\prod_{h=f+2}^{n}P_2[h]\big(P_1[f]P_2[f+1](P_2[f]\oplus P_1[f+1])\big)\end{aligned}$$

当工件 f 与工件 $f+1$ 对换后得到的新排序 W' 所对应的性能指标 $F'\max$ 有

$$F'\max=\Delta\oplus\prod_{h=1}^{f-1}P_1[h]\quad\prod_{h=f+2}^{n}P_2[h]\oplus\big(P_1[f+1]P_2[f](P_2[f+1]\oplus P_1[f])\big)$$

可见, 若

$$(P_1[f]P_2[f+1](P_2[f] \oplus P_1[f+1]) \leq (P_1[f+1]P_2[f](P_2[f+1] \oplus P_1[f])) \tag{3}$$

则有 $F_{\max} \leq F'_{\max}$.

由引理 3 知, 式(3) 等价于

$$(P_1[f] \bar{\oplus} P_2[f+1]) \leq P_1[f+1] \bar{\oplus} P_2[f] \tag{4}$$

即当式(4) 成立时, 排序 W 不劣于 W'.

又由引理 4 和引理 5 可知式(4) 具有传递性, 可知当不等式: $P_1[i] \bar{\oplus} P_2[j] \leq P_1[j] \bar{\oplus} P_2[i]$ 成立时, 存在这样一个最优调度, 在它的排序中每相邻两个工件均满足式(4), 它使得工件 i 排在工件 j 之前加工. 显然, 当 $P_1[i] \bar{\oplus} P_2[j] = P_1[j] \bar{\oplus} P_2[i]$ 时, i 排在 j 之前或之后均可, 定理证毕.

如下的 Johnson 算法给出了满足定理 2 条件的最优调度.

1) 置 $k=1, h=n$;

2) 置当前未排序的工件表为 $\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$;

3) 对未排序的工件找出所有 $P_1[i]$ 和 $P_2[i]$ 中最小的;

4) 若 $P_1[i]$ 最小, 则将 J_i 排到加工序列的第 k 位, 将 k 增 1, 转第 6 步;

5) 若 $P_2[i]$ 最小, 则将 J_i 排到加工序列的第 h 位, 将 h 减 1, 转第 6 步;

6) 若还有未排序的工件, 则转第 3 步; 否则: 停.

注 1　若不止一个工件具有最小加工时间, 则可任选一个 J_i.

参　考　文　献

1　肖承忠. 生产系统工程. 北京: 机械工业出版社, 1987

2　涂奉生. 串行生产线的数学模型及其性能估算. 自动化学报, 1990, 16(6): 495～502

Johnson Algorithm Proved by Minimax Algebra Method

Peng Hong　Zhang Abu

(Dept. of Automation, Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract　The authors prove strictly the Johnson algorithm by modeling the serial production line and based on minimax algebra.

Key words　Discrete event dynamic system, Johnson algorithm, Minimax algebra