第 37卷 第 1期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 1
1998年 1月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jan. 1998

广义加权几何平均组合预测方法研究①

王 应 明
(厦门大学自动化系 厦门 361005)

摘要 提出一类广义加权几何平均组合预测方法,给出其参数估计的二次规划算法.新的组合预测方法比传统的加权几何平均组合预测方法能取得更好的组合预测效果.

关键词 组合预测,参数估计,二次规划
中国图书分类号 O 221.1

组合预测是预测理论研究的重要内容,由于能有效地提高预测精度,因而受到国内外预测界的广泛重视.加权几何平均组合预测是最常用的组合预测方法之一,在某些情况下,可以比加权算术平均组合预测和加权调和平均组合预测取得更好的组合预测效果.但事实上,加权几何平均组合预测方法还可以进一步完善,组合预测效果还能进一步提高,这就是本文所要介绍的广义加权几何平均组合预测方法.

1 广义加权几何平均组合预测模型及参数估计

设某一预测问题在某一时段的实际值为 $y_t\ (t=1,2,\cdots,n)$,对此预测问题有 m 种可行的预测方法,其预测值或模型拟合值分别为 $f_{tj}\ (t=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$.又设 m 种预测方法的加权向量为 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^{\mathrm{T}}$,且满足归一化约束条件和非负约束条件,即

$$e^{\mathrm{T}}W=1,\ W\geqslant 0$$

其中 $e^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)$.记组合预测模型为

$$\hat{y}_t=h(f_{t1},f_{t2},\cdots,f_{tm})$$

构造目标函数

$$\min J_t=\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^{2p}(\ln\hat{y}_t-\ln f_{tj})^2\qquad t=1,2,\cdots,n$$

令 $\dfrac{\partial J_t}{\partial \hat{y}_t}=0$, 整理后得到

$$\ln\hat{y}_t=\frac{\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^{2p}\ln f_{tj}}{\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^{2p}}\qquad t=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

或

$$\hat{y}_t=\exp\Big(\sum_{j=1}^{m}\tilde{W}_j\ln f_{tj}\Big)=\prod_{j=1}^{m}f_{tj}^{\tilde{W}_j}\qquad t=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

① 本文 1997-02-27收到; 国家自然科学基金资助项目

其中 $\tilde{W}_j = W_j f_{tj}^{2p} / \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} \quad t=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$

显然,$\tilde{W}_j$是时间 t的函数,因此,$\hat{y}_t$实质上是 m种可行预测方法的变权重加权几何平均值.式中 p为模型可调参数,特别是当 $p=0$时,有

$$\hat{y}_t = \exp\left(\sum_{j=1}^{m} W_j \ln f_{tj}\right) = \prod_{j=1}^{m} f_{tj}^{W_j} \quad t=1,2,\cdots,n$$

此式即是众所周知的加权几何平均组合预测模型,也就是说,加权几何平均组合预测仅是式(1)或式(2)的特例,因此,式(1)和(2)即为本文所要给出的广义加权几何平均组合预测模型.

由于 p是模型的可调参数,式(1)和(2)实质上包含了一类无限多变权重组合形式在内,因此,可通过对模型参数 p进行寻优处理获得最佳的模型组合形式,从而取得较好的组合预测效果.

为了便于对式(1)进行参数估计,将式(1)转化为

$$\ln \hat{y}_t \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} - \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} \ln f_{tj} = 0 \quad t=1,2,\cdots,n$$

亦即 $\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} (\ln \hat{y}_t - \ln f_{tj}) = 0 \quad t=1,2,\cdots,n$

假设不考虑预测误差的存在,在理想的情况下,应有下式成立

$$\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} (\ln \hat{y}_t - \ln f_{tj}) = 0 \quad t=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

但实际上,由于预测误差的客观存在性,式(3)在通常情况下是不成立的.为此引入误差项

$$\varepsilon_t(p) = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} (\ln y_t - \ln f_{tj}) = 0 \quad t=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

令 $\tilde{f}_{tj}(p) = f_{tj}^{2p}(\ln y_t - \ln f_{tj}) \quad t=1,2,\cdots,n$

则式(4)用向量形式可表示为 $E_p = \tilde{F}_p W$,其中 $E_p = (\varepsilon_1(p), \varepsilon_2(p), \cdots, \varepsilon_n(p))^{\mathrm{T}}$, $\tilde{F}_p = (\tilde{F}_{tj}(p))_{n\times m}$.

人们自然总是希望误差愈小愈好,为此,定义误差性能指标为

$$\min J_p = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(p) = E_p^T E_p = W^T (\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p) W$$

于是,求解最优组合加权向量 W^* 等价于求解如下最优化问题

$$\begin{cases} \min J_p = W^{\mathrm{T}} (\tilde{F}_p^{\mathrm{T}} \tilde{F}_p) W \\ \text{s. t. } e^{\mathrm{T}} W = 1 \text{且 } W \geqslant 0 \end{cases}$$

显然,这是一个二次规划问题.根据二次规划理论可知,该二次规划问题的最优解一定存在,且其 Kuhn-Tucker条件可表示为

$$\begin{cases} (\tilde{F}_p^{\mathrm{T}} \tilde{F}_p) W - \lambda e - \tilde{U} = 0 \\ e^{\mathrm{T}} W = 1 \\ \tilde{U}_i W_i = 0 \quad i=1,2,\cdots,m \\ W, \tilde{U} \geqslant 0 \end{cases}$$

式中 λ为与约束条件 $e^{\mathrm{T}} W = 1$相对应的 Lagrange乘子,$\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \cdots, \tilde{U}_m)^{\mathrm{T}}$为与加权向量 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_m)^{\mathrm{T}}$相对应的 Kuhn-Tucker乘子,$e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$.由于 λ无非负约束,故可令 $\lambda = \lambda' - \lambda''$,且满足: $\lambda', \lambda'' \geqslant 0, \lambda' \cdot \lambda'' = 0$;同时构造辅助线性规划模型($ALP$)为

$$
\min \tilde{J}_p = v
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
(\tilde{F}_p^{\mathrm{T}}\tilde{F}_p)W - \lambda' e + \lambda'' e - \tilde{U} = 0 \\
e^{\mathrm{T}}W + v = 1 \\
W, \tilde{U} \geqslant 0, \lambda', \lambda'', v \geqslant 0 \\
\lambda' \text{与} \lambda'' \text{及} \tilde{U}_i \text{与} W_i \text{不能同时为基变量} (i = 1, 2, \cdots, m)
\end{cases}
$$

解此辅助线性规划模型(ALP),即可得到最优组合加权向量 W^*.设定不同的模型参数 p,可得到不同的最优组合加权向量 W^*,但其中必有一组能使组合预测效果最佳.最优的模型参数 p 通常可采用试探法或寻优方法获得,此处不再详述.

2　组合预测效果评价

为了选择最优模型参数 p,必须制定一套切实可行的评价指标体系,对组合预测效果进行全方位的综合性评价.按照预测效果评价原则和惯例,本文选择下列指标作为评判准则

1) 平方和误差　$\mathrm{SSE} = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2$,式中 y_t 为预测事物实际观测值,$\hat{y}$ 为预测值.

2) 平均绝对误差　$\mathrm{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t - \hat{y}_t|$

3) 均方误差　$\mathrm{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}$

4) 平均绝对百分比误差　$\mathrm{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right|$

5) 均方百分比误差　$\mathrm{MSPE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right)^2}$

3　应用举例

表1　预测实例原始数据简表

Tab. 1 Original data of forecasting examples

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
例1	y_t	3306	4318	4228	4846	6054	8084	8910	10247			
	f_{t1}	2988	4303	4767	5161	6289	7294	9371	9892			
	f_{t2}	3331	3991	4342	5886	5818	8414	8814	9564			
例2	y_t	14.9	18.6	22.2	17.6	19.6	24	31.6	43.7	37	47.2	
	f_{t1}	10	14.9	23.3	26.1	17.5	20.2	26.4	36.8	52.5	38.5	
	f_{t2}	12	15.48	18.95	22.43	25.9	29.38	32.85	36.33	39.8	43.28	
例3	y_t	57.0	65.4	75.4	82.5	92.8	102.7	119.5	143.8	169.7	201.0	215.2
	f_{t1}	54.52	62.89	72.54	83.67	96.51	111.32	128.41	148.11	170.84	197.06	227.31
	f_{t2}	64.48	66.74	68.72	76.61	88.42	104.15	123.79	147.35	174.82	206.21	241.51

笔者对文 [1～3]所给预测实例进行广义加权几何平均组合预测.已知例 1～3的原始数据如表 1,广义加权几何平均组合效果如表 2,表 2中的 p^* 为使组合预测效果最佳的模型参数.为了便于比较分析,表 2中还同时给出各单个预测方法及常用组合预测方法的效果评价.

表 2　预测效果评价简表

Tab. 2 Evaluations of forecasting effects

预测效果评价				SSE	MAE	MSE	MAPE	MSPE
例 1	个体预测	方法(I)		1508 966	378.50	153.55	0.064 4	0.026 4
		方法(II)		1842 451	356.38	169.67	0.060 3	0.030 7
	组合预测	加权算术平均	$W_1=0.559\,2$ $W_2=0.440\,8$	962 003	293.05	122.60	0.051 8	0.022 4
		加权调和平均	$W_1=0.447\,9$ $W_2=0.552\,1$	978 587	280.80	123.70	0.049 9	0.022 6
		广义加权几何平均 $p=0$	$W_1=0.5562$ $W_2=0.4438$	957 546	292.85	122.32	0.051 6	0.022 3
		$p^*=-0.1$	$W_1=0.5351$ $W_2=0.4649$	956 228	288.93	122.23	0.051 0	0.022 3
例 2	个体预测	方法(I)		520.60	6.04	2.28	0.225 1	0.082 5
		方法(II)		199.76	4.11	1.41	0.169 6	0.059 9
	组合预测	加权算术平均	$W_1=0.115\,8$ $W_2=0.884\,2$	194.16	4.05	1.39	0.164 9	0.057 9
		加权调和平均	$W_1=0.039\,3$ $W_2=0.960\,9$	192.71	4.05	1.39	0.166 3	0.058 4
		广义加权几何平均 $p=0$	$W_1=0.215\,9$ $W_2=0.784\,1$	191.35	3.97	1.38	0.159 0	0.056 1
		$p^*=-0.23$	$W_1=0.136\,9$ $W_2=0.863\,1$	184.28	3.92	1.36	0.159 1	0.056 0
例 3	个体预测	方法(I)		795.59	5.78	2.56	0.044 0	0.015 6
		方法(II)		338.25	4.96	1.67	0.047 4	0.017 9
	组合预测	加权算术平均	$W_1=0.125\,9$ $W_2=0.874\,1$	328.56	4.81	1.65	0.044 3	0.015 9
		加权调和平均	$W_1=0.701\,7$ $W_2=0.298\,3$	536.54	4.53	2.11	0.033 2	0.012 6
		广义加权几何平均 $p=0$	$W_1=0.565\,2$ $W_2=0.434\,8$	449.04	4.28	1.92	0.033 4	0.012 2
		$p^*=0.52$	$W_1=0.132\,0$ $W_2=0.868\,0$	328.38	4.80	1.65	0.044 2	0.015 9

例 1和例 2的评价结果表明,取得最佳组合预测效果的模型组合形式,并不是比较常用的加权算术平均、加权调和平均和加权几何平均等组合形式,而是分别取 $p=-0.1$和 $p=-0.23$时的广义加权几何平均组合形式;例 3的评价结果则表明,加权算术平均组合预测和广义加权几何平均组合预测同时取得了最佳的组合预测效果.综合以上分析可以看法,广义加权几何平

均组合预测模型比传统的加权几何平均组合预测模型具有更广泛的适用性,能针对各种不同的预测问题寻优确定模型的最佳组合形式,从而能够有效地提高预测精度,取得比较好的组合预测效果.

参 考 文 献

1 严广松,侯紫燕,赵呈建.河南省纺织企业人才的统计分析及最优组合预测模型.数理统计与管理,1995,(2):19~23

2 周传世,罗国民.加权几何平均组合预测模型及其应用.数理统计与管理,1995,(2):17~19

3 杨桂元,唐小我,马永开.最优加权几何平均组合预测方法研究.统计研究,1996,(2):55~58

Research on the Methods of Combining Forecasts Based on the Generalized Weighted Geometric Means

Wang Yingming

(Dept. of Automtn., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract A class of new methods of combining forecasts based on the generalized weighted geometric means and a relevant linear programming sloving method are proposed. Compared with the traditional combining forecasting method based on the weighted geometric means, the new methods can lead to much more accurate combining forecasting results.

Key words Combining forecasts, Parameter estimation, Quadratic programming