广义加权比例平均组合预测技术研究

王应明　罗　英
厦门大学系统科学系, 厦门 361005

摘　要　本文提出了一类广义加权比例平均组合预测技术。新的组合预测技术比传统的组合预测技术更具有优越性, 能取得更好的组合预测效果。

主题词　预测技术, 参数估计, 二次规划, 最优方案。

Technologies of Combining Forecasts Based on Generalized Weighted Proportional Means

Wang Yingming and Luo Ying
Dept. of Systems Science, Xiamen University, 361005

Abstract This paper proposes a class of new technologies of combining forecasts based on the generalized weighted proportional means. Compared with the traditional technologies, the new can obtain the more accurated combining forecasting results.

Keywords Combining forecasts, Parameter estimation, Proportional means, Quadratic programming.

1 引　言

组合预测是预测理论研究的重要内容, 由于能够有效地提高预测精度, 故而受到国内外预测界的广泛重视。根据预测模型组合方式的不同, 组合预测一般可分为线性组合预测和非线性组合预测两大类。由于线性组合预测比较简单, 故而研究成果最多, 目前已取得丰硕性研究成果, 也最为人们所常用; 至于非线性组合预测, 除加权几何平均组合预测和加权调和平均组合预测外, 几乎较少研究, 这主要是因为难以找到比较有效的非线性组合形式。事实上, 非线性组合预测在某些情况下比线性组合预测还要有效, 例如针对文献 [1]的预测实例, 加权几何平均组合预测就比加权算术平均组合预测更有效, 但这还不是最有效的组合形式, 更有效的组合预测形式就是本文所要介绍的广义加权比例平均组合预测。

2 广义加权比例平均组合预测模型及其参数估计

设某一预测问题在某一时段的实际值为 y_t $(t = 1, 2, \cdots, n)$, 对此预测问题有 m 种可行的预测方法, 其预测值或模型拟合值分别为 f_{tj} $(t = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$。又设 m 种预测方法的加权向量为 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_m)^T$, 且满足归一化约束条件和非负约束条件, 即

$$e^TW = 1 \tag{1}$$

$$W \geqslant 0 \tag{2}$$

其中 $e^T = (1, 1, \cdots, 1)$。根据笔者在文献 [2]导出的广义加权比例平均法计算公式, 令

$$\hat{y}_t = \left[\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} \Big/ \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{p}\right]^{1/p}$$

$$t = 1, 2, \cdots, n;\ p \neq 0 \tag{3}$$

其中 $\hat{y}_t$ 为 m 种可行预测方法在 t 时刻的广义加权比例平均值, p 为非零可调参数, 可针对不同的预

收稿日期: 1996年 10月 12日

测问题取不同的参数值。公式(3)即为本文所要讨论的广义加权比例平均组合预测模型。

对公式(3),令 $p=1$,有

$$\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^2 \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj} \quad t=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

对公式(3),令 $p=-1$,得

$$\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{W_j}{f_{tj}}\right) \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{W_j}{f_{tj}^2}\right) \quad t=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

对公式(3),令 $p=1/2$,得

$$\hat{y}_t = \left(\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj} \sum_{j=1}^{m} W_j \sqrt{f_{tj}}\right)^2 \quad t=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

上述公式(4)~(6)是由公式(3)导出的三种特例,分别称为简单加权比例平均预测,简单加权调和比例平均预测和简单加权平方根比例平均预测。由此可见,模型(3)具有一定的代表性,它包含了一类无限多种非线性组合预测形式在内,可通过对模型参数 p 进行寻优,从而获得最佳的非线性组合预测形式、得到最佳的组合预测效果。

为便于对模型(3)进行参数估计,将(3)式转变为

$$\hat{y}_t^p = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p \quad t=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

亦即

$$\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p \hat{y}_t^p = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{2p} \quad t=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p (\hat{y}_t^p - f_{tj}^p) = 0 \quad t=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

很显然,如果不考虑预测误差的存在,在理想的情况下应有下式成立

$$\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p (y_t^p - f_{tj}^p) = 0 \quad t=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

但事实上,由于预测误差的客观存在性和不可避免性,(10)式在通常情况下是不成立的。为此引入误差项

$$\varepsilon_t(p) = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p (y_t^p - f_{tj}^p) \quad t=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

令

$$\tilde{f}_{tj}(p) = f_{tj}^p (y_t^p - f_{tj}^p)$$
$$t=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

即(11)式用向量形式可表示为

$$E_p = \tilde{F}_p W \tag{13}$$

其中 $E_p = (\varepsilon_1(p), \varepsilon_2(p), \cdots, \varepsilon_n(p))^T$, $\tilde{F}_p = (\tilde{f}_{tj}(p))_{n\times m}$。

人们自然总是希望误差愈小愈好,为此,定义误差性能指标为

$$\min J_p = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(p) = E_p^T E_p = W^T(\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p)W \tag{14}$$

于是,求解最优组合加权向量 W^* 等价于求解如下最优化问题

$$\min J_p = W^T(\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p)W \tag{15}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} e^T W = 1 & (16)\\ W \geqslant 0 & (17)\end{cases}$$

显然,这是一个二次规划问题。根据二次规划理论可知,该二次规划问题的最优解一定存在,且其 Kuhn-Tucker条件可表示为

$$\begin{cases} (\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p)W - \lambda e - \tilde{U} = 0 & (18)\\ e^T W = 1 & (19)\\ \tilde{u}_i W_i = 0 \quad i=1,2,\cdots,m & (20)\\ W, \tilde{U} \geqslant 0 & (21)\end{cases}$$

式中 λ 为与约束条件 $e^T W = 1$ 相对应的 Lagrange 乘子,$\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_m)^T$ 为与加权向量 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_m)^T$ 相对应的 Kuhn-Tucker乘子,$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$。由于 λ 无非负约束,故可令 $\lambda = \lambda' - \lambda''$,且满足:,$\lambda', \lambda'' \geqslant 0$, $\lambda' \cdot \lambda'' = 0$,同时构造辅助线性规划模型(ALP)为

$$\min \tilde{J} = v \tag{22}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} (\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p)W - \lambda' e + \lambda'' e - \tilde{U} = 0 & (23)\\ e^T W + v = 1 & (24)\\ W, \tilde{U} \geqslant 0, \lambda', \lambda'', v \geqslant 0 & (25)\\ \lambda' \text{与} \lambda'' \text{及} \tilde{u}_i \text{与} W_i \text{不能同时} & \\ \quad \text{为基变量} (i=1,2,\cdots,m) & (26)\end{cases}$$

解此辅助线性规划模型(ALP),即可得到广义加权比例平均组合预测模型的最优组合加权向量 W^*。设定不同的模型参数 p,可得到不同的最优组合加权向量 W^*,但其中必有一组能使组合预测效果最佳。最优的模型参数 p 也可通过试探法或寻优方法获得,此处不再详述。

3 组合预测效果评价

为了选择最优模型参数 p 的需要,必须制定一套切实可行的评价指标,对组合预测效果进行全方位的综合性评价。按照预测效果评价原则和惯例,本文选择下列指标作为评判准则。

(1)平方和误差

$$SSE=\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2 \qquad (27)$$

式中 y_t 为预测事物实际观测值, $\hat{y}_t$ 为预测值。

(2)平均绝对误差

$$MAE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t-\hat{y}_t| \qquad (28)$$

(3)均方误差

$$MSE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2} \qquad (29)$$

(4)平均绝对百分比误差

$$MAPE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right| \qquad (30)$$

(5)均方百分比误差

$$MSPE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right)^2} \qquad (31)$$

4 组合预测应用举例

本文以文献 [1, 3, 4]所给预测实例为例进行广义加权比例平均组合预测。已知例 1、例 2和例 3原始数据分别取自于文献 [1, 3, 4], 如表 1所示。广义加权比例平均组合预测效果如表 2所示。表 2中的 p^* 为使组合预测效果最佳的模型参数。为了便于比较分析, 表 2中还同时给出了各单个预测方法及常用组合预测方法的效果评价。

表 1　预测实例原始数据简表

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
例 1	y_t	14.9	18.6	22.2	17.6	19.6	24	31.6	43.7	37	47.2		
	f_{t1}	10	14.9	23.3	26.1	17.5	20.2	26.4	36.8	52.5	38.5		
	f_{t2}	12	15.48	18.95	22.43	25.9	29.38	32.85	36.33	39.8	43.28		
例 2	y_t	57.0	65.4	75.4	82.5	92.8	102.7	119.5	143.8	169.7	201.0	251.2	
	f_{t1}	54.52	62.89	72.54	83.67	96.51	111.32	128.41	148.11	170.84	197.06	227.31	
	f_{t2}	64.68	64.74	68.72	76.61	88.42	104.15	123.79	147.35	174.82	206.21	241.51	
例 3	y_t	11.49	13.06	15.34	20.58	23.28	26.46	27.33	34.22	40.19	53.37	77.79	100.63
	f_{t1}	18.47	14.54	12.84	13.28	16.15	21.16	28.40	37.87	49.58	63.53	79.00	98.12
	f_{t2}	10.03	11.23	15.24	18.67	27.78	26.36	29.67	27.40	42.73	47.36	71.00	109.32

表 2　预测效果评价简表

预测效果评价指标				SSE	MAE	MSE	MAPE	MSPE
例 1	个体预测		方法(I)	520.60	6.04	2.28	0.2251	0.0825
			方法(II)	199.76	4.11	1.41	0.1696	0.0599
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1=0.1158$ $W_2=0.8842$	194.16	4.05	1.39	0.1649	0.0579
		简单加权几何平均	$W_1=0.2159$ $W_2=0.7841$	191.35	3.97	1.38	0.1590	0.0561
		简单加权调和平均	$W_1=0.0393$ $W_2=0.9607$	192.71	4.05	1.39	0.1663	0.0584
		广义加权比例平均($p^*=-0.28$)	$W_1=0.1318$ $W_2=0.8682$	184.87	3.93	1.36	0.1597	0.0562
例 2	个体预测		方法(I)	795.59	5.78	2.56	0.0440	0.0156
			方法(II)	338.25	4.96	1.67	0.0474	0.0179
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1=0.1259$ $W_2=0.8741$	328.56	4.80	1.65	0.0443	0.0159
		简单加权几何平均	$W_1=0.5652$ $W_2=0.4384$	449.04	4.28	1.92	0.0334	0.0122
		简单加权调和平均	$W_1=0.7017$ $W_2=0.2983$	536.54	4.53	2.11	0.0332	0.0126
		广义加权比例平均($p^*=0.50$)	$W_1=0.1388$ $W_2=0.8612$	328.57	4.79	1.65	0.0440	0.0158

(下转第 35页)

得模型的不同形式, 具有很强的灵活性。 本方法为求解群体决策问题提供了新的思路, 是一个有益的尝试, 对提高群决策的质量和扩大其应用领域具有一定的意义。

参 考 文 献

1 陈 . 决策分析. 科学出版社, 1987: 258~ 280

2 Janusz KACPRZYK. Group Decision Making. Fuzzy Sets and System, 1996, 18: 105~ 118

3 贺仲雄. 模糊数学及其应用. 天津科学技术出版社, 1983

4 华中生, 梁梁. 专家群体决策不一致性判定与调整方法. 系统工程学报, 1994, 9(1)

(上接第 27页)

(续表 2)

例 3	个体预测		方法 (I)	401.56	4.88	1.67	0.1959	0.0731
			方法 (II)	245.58	3.59	1.30	0.0998	0.0334
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1 = 0.4121$ $W_2 = 0.5879$	94.89	2.34	0.81	0.0791	0.0283
		简单加权几何平均	$W_1 = 0.2617$ $W_2 = 0.7383$	117.86	2.60	0.90	0.0737	0.0242
		简单加权调和平均	$W_1 = 0.2473$ $W_2 = 0.7527$	126.06	2.67	0.94	0.0742	0.0250
		广义加权比例平均 ($p^* = 0.48$)	$W_1 = 0.3976$ $W_2 = 0.6024$	95.29	2.34	0.81	0.0787	0.0283

从例 1的评价效果可以看出, 取得最佳预测效果的模型组合形式, 并不是比较常用的简单加权算术平均、简单加权几何平均和简单加权调和平均等形式, 而是取 $p = -0.28$时的广义加权比例平均组合预测形式。 例 2和例 3的评价效果则表明, 仅就这两个实例而言, 简单加权算术平均组合预测与广义加权比例平均组合预测同时取得了最佳的组合预测效果。 综合以上分析可以看出, 广义加权比例平均组合预测模型具有广泛的代表性、普遍性和适用性, 能针对各种不同的预测问题寻优确定模型的最佳组合形式, 从而能够有效地提高预测精度, 取得较好的预测效果。

参 考 文 献

1 周传世, 罗国民 . 加权几何平均组合预测模型及其应用 . 数理统计与管理, 1995(2): 17~ 19

2 王应明, 傅国伟 . 群组预测集结方法研究 . 预测, 1993(3): 42~ 45

3 杨桂元, 唐小我, 马永开 . 最优加权几何平均组合预测方法研究 . 统计研究, 1996(2): 55~ 58

4 孙庆凯 . 平均预测法的应用条件 . 预测, 1985(2): 18~ 21