

关于国民收入随机模型的最小方差控制^①

黄国石 彭 洪

(厦门大学自动化系 厦门 361005)

摘要 通过对希克斯(Hicks)一般模型的修正,建立一类关于国民收入的 Astrom模型.由此讨论最小方差控制策略,同时结合我国实际问题进行计算、分析.

关键词 Astrom模型,国民收入,最小方差,控制

中国图书分类号 O 231

著名的萨缪尔森乘数 加速数模型表示为

$$Y_t = C_t + I_t \quad (1)$$

$$C_t = bY_{t-1} \quad (2)$$

$$I_t = G + k(C_t - C_{t-1}) \quad (3)$$

上式中 Y_t , C_t , I_t 分别表示第 t 期的国民收入、消费、投资。 b , G , k 为常数。式(1)表示国民收入等于支出,即等于投资与消费之和,是均衡条件。式(2)为消费函数, b 为边际消费倾向。式(3)表示总投资 I_t 等于自发投资 G 与引致投资 $k(C_t - C_{t-1})$ 之和,而引致投资取决于消费。

希克斯简单模型也是由 3 个方程式表示,其中前两个方程与萨缪尔森模型中的式(1)、(2)相同,差别仅在如下第 3 个投资方程

$$I_t = A_0(1+g)^t + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (4)$$

希克斯以为总投资由自发投资 $A_0(1+g)^t$ 和引致投资 $k(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ 两部分组成。自发投资有固定增长率 g ,而非萨缪尔森考虑的常数 G 。而引致投资取决于国民收入而非消费。可见,希克斯模型比萨缪尔森模型有所改进。

在现实经济社会中,消费不只是取决于前一期国民收入,而是依赖于前几期的国民收入,即

$$C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \dots + b_n Y_{t-n} \quad (5)$$

而引致投资不可能在一期内全部完成,而是分配在若干期内完成,即

$$I_t = A_0(1+g)^t + K_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + K_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots + K_n(Y_{t-n} - Y_{t-n-1}) \quad (6)$$

式(1)、(5)和(6)就构成了希克斯一般模型。这个模型更加贴近现实。

从我国改革开放 10 多年的经济运行状况来看,自发投资并非希克斯模型中式(6)所示是一个固定不变的增长率 g ,投资不仅依赖于前几期的国民收入,同时也依赖前几期的自发投资。把式(6)修正成如下的式(7)。

^① 本文 1997-12-30 收到; 福建省自然科学基金资助项目

$$I_t = U_1 u_{t-1} + U_2 u_{t-2} + \dots + U_n u_{t-n} + K_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + K_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots + K_n(Y_{t-n} - Y_{t-n-1}) \tag{7}$$

其中 u_t 表示 t 期自发投资, U 为系数, 由式 (1) (5) (7) 构成的模型, 就是本文研究的对象.

1 Astrom 模型的建立

把式 (5) (7) 代入式 (1), 经过整理, 有

$$Y_t - T_1 Y_{t-1} - T_2 Y_{t-2} - \dots - T_n Y_{t-n} = U_1 u_{t-1} + U_2 u_{t-2} + \dots + U_n u_{t-n} \tag{8}$$

其中 $T_1 = b_1 + K_1$

$$T_2 = b_2 + K_2 - K_1$$

$$T_{n-1} = b_{n-1} + K_{n-1} - K_{n-2}$$

$$T_n = -K_n$$

引入移位算子 q^{-1}

$$Y_{t-1} = q^{-1} Y_t$$

则式 (8) 可写成

$$A(q^{-1})Y_t = q^{-1}B(q^{-1})u_t \tag{9}$$

其中 $A(q^{-1}) = 1 - T_1 q^{-1} - T_2 q^{-2} - \dots - T_n q^{-n}$

$$B(q^{-1}) = U_1 + U_2 q^{-1} + \dots + U_n q^{-n+1}$$

实际经济系统可能受到诸多随机因素干扰, 由于考虑系统是线性的, 可用迭加原理, 将所有作用于系统的干扰, 视为一个作用在系统输出之上的等价扰动 V_t 来代替, $\{V_t\}$ 是一随机序列. 考虑随机扰动影响的模型表示为

$$A(q^{-1})Y_t = q^{-1}B(q^{-1})u_t + V_t \tag{10}$$

进一步假定干扰 V_t 是一个具有有理谱密度的干扰随机过程, 那么根据谱因式分解和谱表示定理, V_t 可表示为

$$V_t = \frac{N(q^{-1})}{M(q^{-1})} e_t \tag{11}$$

其中 $\{e_t\}$ 是一个均值为 0, 方差为 1 的正态白噪声序列, $M(q^{-1}), N(q^{-1})$ 为多项式, 一般为无限阶的, 通常用一有限阶系统来近似它, 即有自回归模型

$$V_t = e_t + h_1 e_{t-1} + \dots + h_s e_{t-s} \tag{12}$$

来代替式 (11), 代入式 (10) 有

$$A(q^{-1})Y_t = q^{-1}B(q^{-1})u_t + H(q^{-1})e_t \tag{13}$$

其中 $H(q^{-1}) = 1 + h_1 q^{-1} + \dots + h_s q^{-s}$

式 (13) 具有 Astrom 模型的形式, 是本文讨论的被控对象.

2 最小方差控制策略

本文针对式 (13) 表示的随机模型, 选择自发投资 u_t 为控制变量, 国民收入为输出变量, 通过对国民收入的调节控制, 使其达到预定的目标输出.

由于模型 (13) 存在延迟单位 q^{-1} , 现时刻的控制作用要滞后一个采样周数才能影响输出. 如果提前一步对输出作出最优预测, 即一步最优预测, 则可提高系统的控制效果. 根据下面定理, 可作出最优预测.

定理 1 对于过程 (13), 到 K 时刻为止的所有输入输出观测数据为

$$\{Y_t, Y_{t-1}, \dots; u_t, u_{t-1}, \dots\}$$

对 $(t+1)$ 时刻的输出预测,记为 $Y(t+1|t)$, 预测误差记为 $\Upsilon(t+1|t) = Y_{t+1} - Y(t+1|t)$

那么使预测误差的方差

$$J = E\{\Upsilon(t+1|t)\}^2$$

最小的一步最优预测 $Y^*(t+1|t)$ 由下列方程给定

$$H(\bar{q}^{-1})Y^*(t+1|t) = G(\bar{q}^{-1})Y_t + F(\bar{q}^{-1})u_t \quad (14)$$

式中 $F(\bar{q}^{-1}) = F'(\bar{q}^{-1})B(\bar{q}^{-1})$

$$H(\bar{q}^{-1}) = A(\bar{q}^{-1})F'(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-1}G(\bar{q}^{-1})$$

$$F'(\bar{q}^{-1}) = f_0 + f_1\bar{q}^{-1} + \dots + f_l\bar{q}^{-l}$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1\bar{q}^{-1} + \dots + g_h\bar{q}^{-h}$$

$$F(\bar{q}^{-1}) = f_0 + f_1\bar{q}^{-1} + \dots + f_l\bar{q}^{-l}, f_0 = U_1$$

$$\deg F' = l' = l - 1 = 0, \deg G = h = n - 1$$

$$\deg F = l = (m - 1) + 1 - 1 = m - 1$$

定理 1 证明参见文 [1], 这里延迟 $d = 1$.

在最优预测的基础上, 可对系统进行最小方差控制.

定理 2 对于过程 (13), 使实际输出 Y_{t+1} 与希望输出 $Y_{m(t+1)}$ 之间的误差的方差

$$J = E\{[Y_{t+1} - Y_{m(t+1)}]\}^2$$

最小的控制律为

$$F(\bar{q}^{-1})u_t = Y_{m(t+1)} + [H(\bar{q}^{-1}) - 1]Y^*(t+1|t) - G(\bar{q}^{-1})Y_t \quad (15)$$

定理 2 证明参见文 [1].

3 实际问题的计算

根据上面提取的理论模型, 可对实际问题进行计算. 考虑模型 (5), 式 (7) 中 $n = 4, m = 4$ 的情形, 即

$$C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + b_3 Y_{t-3} + b_4 Y_{t-4} \quad (16)$$

$$I_t = U_1 u_{t-1} + U_2 u_{t-2} + U_3 u_{t-3} + U_4 u_{t-4} + K_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + K_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + K_3(Y_{t-3} - Y_{t-4}) + K_4(Y_{t-4} - Y_{t-5}) \quad (17)$$

根据《1995 年中国统计年鉴》的统计资料 (个别数据取自前几年同类的年鉴), 把我国改革开放 16 年来的有关数据整理成表 1. 由表 1 数据, 应用最小二乘法, 可以估计出如下参数:

$$b_1 = 0.944\ 740\ 899\ 439\ 21, \quad k_3 = -0.051\ 222\ 517\ 760\ 80$$

$$b_2 = -0.681\ 358\ 670\ 863\ 737, \quad k_4 = 2.113\ 396\ 351\ 712\ 13$$

$$b_3 = 0.442\ 195\ 160\ 949\ 86, \quad U_1 = 10.207\ 124\ 009\ 497\ 22$$

$$b_4 = 0.093\ 840\ 746\ 354\ 90, \quad U_2 = -15.468\ 038\ 842\ 531\ 67$$

$$k_1 = 1.082\ 778\ 386\ 721\ 64, \quad U_3 = 3.424\ 944\ 868\ 728\ 28$$

$$k_2 = 1.262\ 685\ 633\ 437\ 90, \quad U_4 = 0.540\ 877\ 498\ 277\ 12$$

表 1 1979~ 1994年统计数据
Tab. 1 Statistic data for 1979~ 1994

年	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
C_t	2 619. 4	2 976. 1	3 309. 1	3 637. 9	4 020. 5	4 694. 5	5 773. 0	6 542. 0
Y_t	4 093. 6	4 566. 1	4 890. 1	5 398. 1	6 025. 5	7 163. 1	9 159	10 388
I_t	1 474. 2	1 590	1 581	1 760. 1	2 005. 0	2 468. 6	3 386	3 846
u_t	418. 2	349. 3	269. 8	279. 8	339. 7	421. 0	403. 0	440. 6
年	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
C_t	7 451. 2	9 360. 1	10 556. 5	11 365	13 145. 9	15 952. 1	20 182. 2	26 656. 0
Y_t	11 773. 2	14 855. 1	16 651. 5	17 809. 2	20 662. 9	25 588. 1	35 180. 2	45 600
I_t	4 322	5 495	6 095	6 444	7 517	9 636	14 998	18 944
u_t	475. 5	410	341. 6	385. 4	372. 9	332. 4	456. 3	463. 6

保留估计值 5位小数,代入式 (16)、(17)后有

$$\begin{aligned}
 C_t = & 0.99474Y_{t-1} - 0.68136Y_{t-2} + 0.4422Y_{t-3} + 0.09384Y_{t-4} \\
 I_t = & 10.2072u_{t-1} - 15.46804u_{t-2} + 3.42494u_{t-3} + 0.54088u_{t-4} \\
 & 1.08278(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + 1.26269(Y_{t-2} - Y_{t-3}) - 0.05122(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \\
 & 2.11340(Y_{t-4} - Y_{t-5})
 \end{aligned} \tag{19}$$

C_t 和 I_t 的拟合曲线分别见图 1 2(其中虚线为拟合结果).

由图 1可见, C_t 的拟合曲线还是令人满意的,而 I_t 的拟合曲线(见图 2),在 1989年间和 1993年间存在较大差距.这里需要说明表 1中的有关数据.对于 Y_t ,按过去的统计口径对应于国民收入.近年来统计口径有所改变,因而 Y_t 数据我们对应于《1995年中国统计年鉴》中的国内生产总值,是总消费和总投资的实际和,即国内支出总额.由于净出口比例较小,本文略去不考虑.在我国没有现成的自发投资数据可用,考虑到改革开放以来,固定资产投资占总投资比重为 80%左右,近年来比重还在不断增大,本文就把国有固定资产投资中的国家预

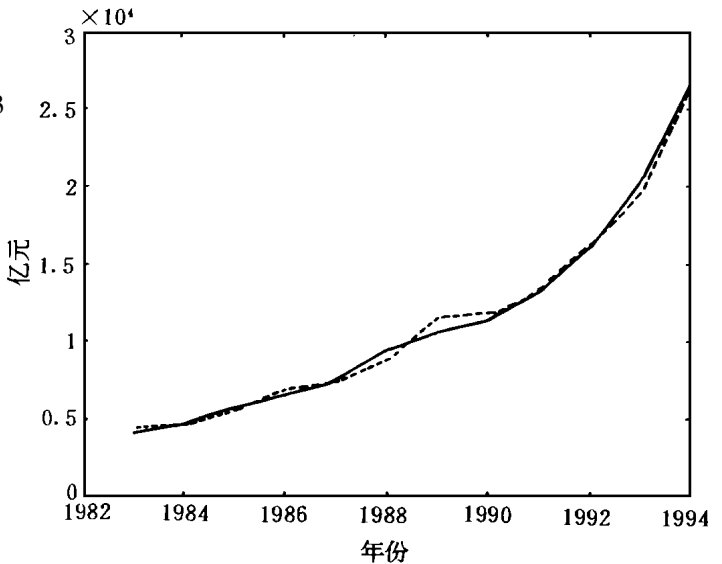


图 1 C_t 的拟合曲线
Fig. 1 Fit curve of C_t

算内资金作为自发投资来处理.

把式 (18)、(19)代入 (1)式,经过运算整理得

$$Y_t - 2.02752Y_{t-1} - 0.50145Y_{t-2} + 0.87171Y_{t-3} - 2.25846Y_{t-4} - 2.1134Y_{t-5} = 10.20712u_{t-1} - 15.46804u_{t-2} + 3.42494u_{t-3} + 0.54088u_{t-4} \quad (20)$$

至于随机扰动表达式 (12),也取 $S=4$,考虑到不同历史时期的扰动对 Y_t 的影响不同,故直接选取 $e_1=0.5, e_2=0.3, e_3=0.2, e_4=0.1$.扰动作用加到式 (20)后,用 Astrom 模型形式表示,有

$$(1 - 0.20275q^{-1} + 0.50145q^{-2} + 0.87171q^{-3} - 2.25846q^{-4} - 2.1134q^{-5})Y_t = q^{-1}(10.20712 - 15.4684q^{-1} + 3.42494q^{-2} + 0.5408q^{-3})u_t + (1 + 0.5q^{-1} + 0.3q^{-2} + 0.2q^{-3} + 0.1q^{-4})e_t \quad (21)$$

针对模型 (21),根据定理 1,容易求出一步最优预测:

$$Y(t+1|t) + 0.5Y(t|t-1) + 0.3Y(t-1|t-2) + 0.2Y(t-2|t-3) + 0.1Y(t-3|t-4) = 2.52752Y_t - 0.20145Y_{t-1} - 0.67171Y_{t-2} + 2.35846Y_{t-3} + 2.1134Y_{t-4} + 10.20712u_t - 15.4684u_{t-1} + 3.42494u_{t-2} + 0.54088u_{t-3} \quad (22)$$

在求得一步最优预测基础上,根据定理 2,可求得最小方差控制为

$$u_t = 1.51542u_{t-1} - 0.33554u_{t-2} - 0.053u_{t-3} + 0.098Y_m(t+1) + 0.049Y(t|t-1) + 0.02939Y(t-1|t-2) + 0.01959Y(t-2|t-3) + 0.0098Y(t-3|t-4) - 0.24762Y_t + 0.01974Y_{t-1} + 0.06581Y_{t-2} - 0.23106Y_{t-3} + 0.05299Y_{t-4} \quad (23)$$

3 结束语

从式 (23)可以看出,所设计的最小方差控制策略 u_t 具有政策连续性,该控制策略不仅是本期国内生产总值的函数,也是前几期国内生产总值和自发投资的函数,同时还兼顾考虑到前几期最优预测问题.由于选取的准则是输出方差最小,所以系统输出量国内生产总值在最小方差控制 u_t 的控制下,国内生产总值波动程度达到极小.我国多年的经济实践已证实,经济波动幅度大,波动频繁的周期,平均增长率在该周期内就偏低;相反,波动幅度小,相对稳定的时期,平均增长率就高.适度的经济增长应把经济增

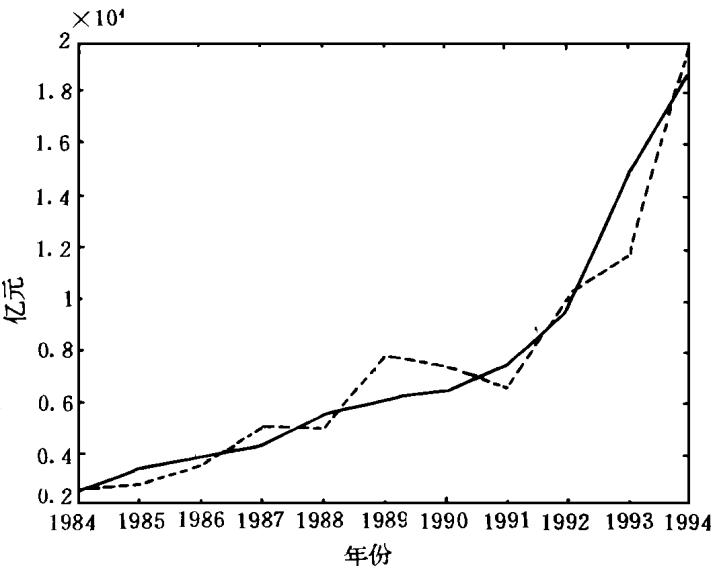


图 2 I_t 的拟合曲线

Fig. 2 Fit curve of I_t

长的波动控制在合理范围之内,避免大起大落,这是促进经济增长良性循环的重要前提.如果

片面地从某一年份,某一单独方面采取措施,突变某年度的投资规模,可能会破坏相关因素的客观比例关系,造成不必要的损失.可以说,最小方差控制策略具有稳健的宏观经济控制策略.

参 考 文 献

- 1 李清泉.自适应控制系统理论、设计与应用.北京:科学出版社,1990 250, 252
- 2 丁华.动态经济系统的分析与仿真.南京:南京大学出版社,1993
- 3 陈亚陵.系统辩识.厦门:厦门大学出版社,1990
- 4 黄国石.固定资产投资的最小方差控制.厦门大学学报(自然科学版),1995,34(3): 328- 332

Minimum Variance Control for Stochastic Model of National Income

Huang Guoshi Peng Hong

(Dept. of Automation, Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract By modifying the Hicks model, an Astrom stochastic control model for national income is obtained. Further, the policy of minimum variance control for national income is discussed. The control policy is illustrated by an appropriate example in China.

Key words Astrom model, National income, Minimum variance, Control