第 36卷 第 1期 厦门大学学报(自然科学版) Vol.36 No.1
1997年 1月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jan. 1997

一类集值映象的拓扑度及某些应用①

杨 书 郎
(厦门大学自动化系 厦门 361005)

摘要 建立(B)空间中集值的 1-集压缩局部固有场的拓扑度;给出对映象方程的非零解问题、多解问题的某些应用.

关键词 拓扑度,集值映象
中国图书分类号 O 177.91

在[3,4]中,建立了(B)空间中锥性、单值的 1-集压缩局部固有场的不动点指数,拓展了通常的凝聚锥映象的不动点指数的概念和应用范围.

笔者将对集值的 1-集压缩局部固有场,建立拓扑度,并应用它研究映象方程的非零解和多解问题.

本文使用[3~6]中的符号和概念.特别地,$X:=(B)$空间;$D:=X$中有界开的θ邻域;$K:=X$中的有界开集;$K^r:=\{x\in X;\|x\|<r\}$;$I:=[0,1]$;$\mathrm{conv}(A,a):=\mathrm{conv}[A\cup\{a\}]$;$T(\cdot):=X$中的非紧性测度;$B(X)$、$cf(X):=X$中不空的有界、闭凸子集族;对于$H(x,t)(x\in A,t\in I)$,记$H_t(x):=H(x,t)$、$H_I(x):=H(x,I)$.

另外,$\deg^*(\cdot,\cdot,\cdot):=$严格集压缩场的拓扑度;$\deg(\cdot,\cdot,\cdot):=$ 1-集压缩局部固有场的拓扑度.

1 一种拓扑度

现在,着手建立集值的 1-集压缩局部固有场的拓扑度,并研究其性质.

定义 1[3,4] $H:\bar{K}\times I\to cf(X)$称为局部固有场,如果场$x-H(x,t)$是局部固有的;特别地,$F:\bar{K}\to cf(X)$称为局部固有场,如果$x-F(x)$是局部固有的.

先建立如下的

引理 1 设 1)$F:\bar{K}\to cf(X)$是个闭的局部固有场;2)F在边界∂K上无不动点,即

$$x\overline{\in}F(x)\qquad(x\in\partial K)\tag{1}$$

则必有$W\in(0,1)$使得

$$x\overline{\in}\lambda F(x)\qquad(x\in\partial K,\lambda\in[W,1])\tag{2}$$

证 设这个W不存在,则对任意n,有$\lambda_n\in(0,1)$、$x_n\in\partial K$和$y_n\in F(x_n)$使得$x_n=\lambda_n y_n$,且使$\lambda_n\to1$.令$u_n:=x_n-y_n$,则$u_n=(\lambda_n-1)y_n\to\theta\ (n\to\infty)$.易见$\{u_n\}\subset\{x_n-F(x_n)\}$,故据引理条件 1)便得,$\{x_n\}$含收敛子列$x_{n_j}\to x\in\partial K$.易见$y_{n_j}\to x$,故得$x\in F(x)$,和(1)相矛盾. 证毕

① 本文 1995-03-15收到; 1996-08-27收到修改稿

下面恒设 $F: \bar{K} \to cf(X)$ 是个满足(1)的上半连续(u. s. c)的 1-集压缩局部固有场. 现依下述步骤定义场 $id-F$ 在 K 中关于 θ 的拓扑度.

1)由于 F 是点闭的 $u.\ s.\ c$ 映象, 故是个闭映象[5]. 据引理 1得, 可取 $W \in (0, 1)$ 使得(2)成立.

2)任取 $\lambda \in (W, 1)$. 易见 λF 是严格集压缩映象, 故可定义 $id-\lambda F$ 在 K 中关于 θ 的拓扑度 $\deg^*(id-\lambda F, K, \theta)$. 现定义 $id-F$ 在 K 中关于 θ 的拓扑度为

$$\deg(id-F, K, \theta) := \deg^*(id-\lambda F, K, \theta) \tag{3}$$

下面定理说明, 上述定义是有意义的.

定理 1　以下命题为真:

(1. 1)　$\deg(id-F, K, \theta)$ 的值和 $\lambda \in (W, 1)$ 的选取无关, 也和满足(2)的 $W \in (0, 1)$ 的选取无关.

(1. 2)　当 F 为严格集压缩映象时, 必有

$$\deg(id-F, K, \theta) = \deg^*(id-F, K, \theta) \tag{4}$$

证　1)关于(1. 1). 设 $W_1, W_2 \in (0, 1)$ 都使(2)成立; 又设 $\lambda_i \in [W_i, 1)$ $(i=1, 2)$. 令 $H(x, t) := (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)F(x)$. 由(2)得 $x \overline{\in} H(x, t)$ $(x \in \partial K, t \in I)$. 据严格集压缩场的拓扑度的同伦不变性得:

$$\deg^*(id-\lambda_1 F, K, \theta) = \deg^*(id-H_1, K, \theta) = \deg^*(id-H_0, K, \theta) = \deg^*(id-\lambda_2 F, K, \theta).$$

可见, 命题(1. 1)为真.

2)关于(1. 2). 任取 W 满足(2)和 $\lambda \in (W, 1)$. 类似于 1)的证明可得, $\deg^*(id-F, K, \theta) = \deg^*(id-\lambda F, K, \theta)$, 再由(3)便得(4).　　证毕

下面研究上述拓扑度的某些性质. 恒设 $W \in (0, 1)$ 满足(2).

定理 2　设 F 是如定义中所示. 则 F 的拓扑度具有如下性质:

(2. 1)存在性　若 $\deg(id-F, K, \theta) \neq 0$, 则有 $u \in K$ 使得 $u \in F(u)$;

(2. 2)标准性　若 $a \in K$ 使得 $F(x) = \{a\}$ $(x \in \bar{K})$, 则

$$\deg(id-F, K, \theta) = 1; \tag{5}$$

(2. 3)可加性　若 K_1, K_2 为 K 中互不相交开集, 又设

$$x \overline{\in} F(x) \qquad (x \in \bar{K} \setminus (K_1 \cup K_2)) \tag{6}$$

则必

$$\deg(id-F, K, \theta) = \deg(id-F, K_1, \theta) + \deg(id-F, K_2, \theta) \tag{7}$$

证　1)关于存在性. 设 $\deg(id-F, K, \theta) \neq 0$. 现取 $\{\lambda_n\} \subset (W, 1)$ 使得 $\deg^*(id-\lambda_n F, K, \theta) = \deg(id-F, K, \theta) \neq 0$ 和 $\lambda_n \to 1$. 由 $\deg^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的存在性, 有 $\{x_n\} \subset K$ 使得 $x_n \in \lambda_n F(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$.

取 $y_n \in F(x_n)$ 使 $x_n = \lambda_n y_n$, 记 $z_n := x_n - y_n = (\lambda_n - 1)y_n$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$. 易见 $z_n \in x_n - F(x_n)$ 且 $z_n \to \theta$. 因 F 是局部固有场, 故 $\{x_n\}$ 含收敛的子序列 $x_{n_i} \to x \in \bar{K}$. 显见 $y_{n_i} \to x$ 且 $x \in F(x)$. 再据(1)便得 $x \in K$.

2)关于标准性. 设 $a \in K$ 使得 $F(x) = \{a\}$ $(x \in \bar{K})$. 取适当的 $\lambda \in (W, 1)$ 使得 $\lambda a \in K$, 这时 $\lambda F(x) = \{\lambda a\}$ $(x \in \bar{K})$. 据 $\deg^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的标准性可得, $\deg(id-F, K, \theta) = \deg^*(id-\lambda F, K, \theta) = 1$.

3)关于可加性. 设 K_1, K_2 为 K 中的不相交开集, 且使 (6)满足. 类似于引理 1之证明, 有 $W' \in (0, 1)$使得对任意的 $\lambda \in (W', 1)$, 当把 (6)中的 $F(x)$换为 $\lambda F(x)$时, 式 (6)仍成立. 于是由 $\deg(\cdot, \cdot, \cdot)$的定义和 $\deg^*(\cdot, \cdot, \cdot)$的可加性便得式 (7)成立. 证毕

定理 3 (同伦不变性) 设 1) $H: \bar{K} \times I \to cf(X)$是个 u. s. c的局部固有场; 2) H_I 是个 1-集压缩映象; 3) H_t 在 ∂K上无不动点, 即

$$x \notin H(x, t) \qquad (x \in \partial K, t \in I) \tag{8}$$

则拓扑度 $\deg(id - H_t, K, \theta)$为常数.

证 类似于引理 1的证明得, 有 $W \in (0, 1)$使

$$x \notin \lambda H(x, t) \qquad (x \in \partial K, \lambda \in (W', 1), t \in [0, 1]) \tag{9}$$

这时由 $\deg(\cdot, \cdot, \cdot)$的定义和 $\deg^*(\cdot, \cdot, \cdot)$的同伦不变性便得 (对于任取 $\lambda \in (W', 1)$):
$\deg(id - H_t, K, \theta) = \deg^*(id - \lambda H_t, K, \theta)$, 为常数. 证毕

除了定理 1, 2, 3所示的外, 上述拓扑度还有其它一些有用性质, 将另文讨论. 下面定理对于拓扑度的计算是有用的.

定理 4 设 F 如定理 2条件所示, 则以下命题成立:

(4. 1)设 1) $\theta \in K$; 2) F 满足 Leray-Schauder边界条件:

$$mx \notin F(x) \qquad (m > 1, x \in \partial K) \tag{10}$$

则 $\deg(id - F, K, \theta) = 1$

(4. 2)设 $k \in X \setminus \{\theta\}$使得 F 在边界 ∂K满足

$$x \notin F(x) + Uk \qquad (x \in \partial K, U > 0) \tag{11}$$

则 $\deg(id - F, K, \theta) = 0$

证 先证 (4. 1). 定义 $H: \bar{K} \times I \to cf(X)$如下

$$H(x, t) := tF(x) \qquad (x \in \bar{K}, t \in I)$$

由 $H_1(x) = F(x)$, $H_0(x) = \{\theta\} \subset K$. 易见 (8)满足.
则标准性和同伦不变性便得

$$\deg(id - F, K, \theta) = \deg(id - H_0, K, \theta) = 1$$

再证 (4. 2). 设 $\deg(id - F, K, \theta) \neq 0$. 这时取 U_0 使得

$$\sup_{\substack{x \in \bar{K} \\ y \in F(x)}} \frac{\| x - y \|}{\| k \|} < U_0 \tag{12}$$

又定义 $H: \bar{K} \times I \to cf(X)$如下:

$$H(x, t) := F(x) + tU_0 k \qquad (x \in \bar{K}, t \in I)$$

显见 $x \notin H(x, t)$ $(x \in \partial K, t \in I)$. 由同伦不变性得: $\deg(id - H_1, K, \theta) = \deg(id - H_0, K, \theta) = \deg(id - F, K, \theta) \neq 0$. 于是由存在性得, 有 $x \in K$ 使 $x \in F(x) + U_0 k$, 取 $y_0 \in F(x)$使 $x = y_0 + U_0 k$, 故 $U_0 = \| x - y_0 \| / \| k \|$, 这和 (12)相矛盾. 故必 $\deg(id - F, K, \theta) = 0$ 证毕

2 多解问题

作为上述拓扑度的一个应用, 下面建立有关集值的 1-集压缩局部固有场方程

$$\theta \in x - F(x) \qquad (x \in \bar{K}) \tag{13}$$

的多解问题的一个结果.

定理 5 设 1) $\theta \in K$, 且 $F: \bar{K} \to cf(X)$是个 u. s. c的 1-集压缩的局部固有场; 2) F 也满足如

下条件:

i)对某 $k\in X\setminus\{\theta\}$, 条件(11)满足;

ii) $$\overline{\lim_{x\to\theta}}\left(\sup_{y\in F(x)}\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)<1 \tag{14}$$

则方程(13)在 $\bar{K}$ 中至少有两个解, 其中至少一个是非零的.

证　首先由(14)得, 可取 $r>0$ 使得当记 $D:=K^r$ 时, 有 $\bar{D}\subset K$ 且 $F(\partial D)\subset D$, 当然, F 在 ∂D 中无不动点. 易见, 当用 D 换 K 时, (10)满足. 于是由定理 4得

$$\deg(id-F,D,\theta)=1 \tag{15}$$

故方程(13)在 D 中有解 x_1.

其次讨论如下两情况:

i)方程(13)在 ∂K 上有解 x_2, 这时, x_2 当然是非常零的;

ii)方程(13)在 ∂K 上无解. 这时, 由定理 4得 $\deg(id-F,K,\theta)=0$. 由可加性得

$$\deg(id-F,K\setminus\bar{D},\theta)=\deg(id-F,K,\theta)-\deg(id-F,D,\theta)=0-1=-1,$$

故方程(13)在 $K\setminus\bar{D}$ 中仍有解 x_2, 也是非零的.　　证毕

参 考 文 献

1 Canetti A, Marino G, Pietramala G. Fixed point theorems for multivalued mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal. TMA.*, 1991, 17(1): 11～20

2 Petryshyn W V. Fixed point theorems for semidifferentiable k-set-contractions in order Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, 133(2): 297～305

3 Yang Shulang(杨书郎). On the weak semiderivative of mappings and the mapping equations. *Chinese Science Bull.*, 1991, 36(21): 1839～1842

4 杨书郎. 关于弱半可微映象方程的几个问题. 系统科学与数学, 1994, 14(4): 289～302

5 杨书郎. 关于非零解与固有元的若干问题. 数学进展, 1994, 23(6): 543～550

6 杨书郎. 关于 LCS中一个模型的某些结果. 数学物理学报, 1995, 15(2): 93～98

The Topological Degree and Some Applications for a Class of Set Valued Mappings

Yang Shulang

(*Dept. of Automtn., Xiamen Univ., Xiamen* 361005)

Abstract　In the paper, the topological degree for a class of set valued mappings in (B) space is established, and as an application, the problems on the non-zero solutions and multiple solutions are studied.

Key words　Topological degree, Set valued mapping