

# 能量损失与涡漩相关矩关系的 理论研究

胡国清 罗任飞

(厦门大学科学仪器与精密机械系, 厦门 361005)

**摘 要** 本文从二次流能量损失的基础上研究, 得到了涡漩相关矩与能量损失的关系, 推导出涡漩雷诺应力方程, 为进一步研究能量损失提供了新的依据。

**关键词** 能量损失, 涡漩相关矩, 涡漩雷诺应力方程

## 0 前 言

流体在管道内的能量损失有多种形式<sup>[1][2]</sup>。但二次流及它的各阶相关矩是造成能量损失的主要原因之一, 实验发现<sup>[1][3]</sup>流体经过弯曲管道、方形管道时形成二次流。由于离心力和浮力<sup>[4]</sup>是产生二次流的机理, 故很多研究成果对此进行报道<sup>[5]</sup>。即: 在圆形弯曲管道内, 离心力是产生二次流的主要根源; 在方形管道内, 浮力<sup>[4]</sup>是产生二次流的主要根源。但是, 在二次流形成后, 二次流是怎样造成能量损失的, 对其损失机理方面的研究甚少<sup>[1]</sup>, 本文的重点就是研究二次流形成过程, 及对能量损失的机理。

## 1 涡漩雷诺应力方程的推导

在真实流体中, 流体运动非常复杂, 研究也比较困难。本文主要研究不可压、质量力有势的流体运动规律。根据不可压质量力有势流体涡漩运动方程得<sup>[6]</sup>(本文中的所有方程全部采用张量形式):

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u^k \omega_{i,k} - \omega^k u_{i,k} + \nu \omega_{i,kk} \quad (1)$$

式(1)中,  $u$ 、 $\omega$ 、 $\nu$  和  $t$  分别代表速度、涡量、运动粘度和时间;  $i$ 、 $k$  以及下文的  $j$  代表 Einstein 求和哑指标。

将速度  $u$  和涡量  $\omega$  分别用平均量  $\bar{u}$ 、 $\bar{\omega}$  和  $u'$ 、 $\omega'$  表示:

$$u = \bar{u} + u' \quad \omega = \bar{\omega} + \omega' \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)取平均得

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + \bar{u}^k \bar{\omega}_{i,k} + \overline{u'^k \omega'_{i,k}} = \bar{\omega}^k \bar{u}_{i,k} + \overline{\omega'^k u'_{i,k}} + \nu \bar{\omega}_{i,kk} \quad (3)$$

本文于 96 年 6 月 7 日收到。

$$\therefore \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial t} = -\overline{u^k \omega_{i,k}} - \overline{u'^k \omega'_{i,k}} + \overline{\omega^k u_{i,k}} + \overline{\omega'^k u'_{i,k}} + \nu \overline{\omega_{i,kk}} \quad (4)$$

分析式(4)可得:右边第一、第二项为涡线的变形项,它随位移的变化而变化,是产生二次涡漩的主要根源;第三和第四项是广义雷诺应力项。这两项是激发二次流的主要根源。由于这四项的作用,所以流体就产生了二次流,为了进一步地探索二次流的机理,将式(1)减式(3)得:

$$\frac{\partial \omega'_i}{\partial t} + \overline{u^k \omega'_{i,k}} + \overline{u'^k \omega'_{i,k}} = \overline{\omega^k u'_{i,k}} + \overline{\omega'^k u_{i,k}} - \overline{\omega'^k u'_{i,k}} + \overline{u'^k \omega'_{i,k}} + \nu \omega'_{i,kk} \quad (5)$$

将式(5)中的求和哑指标*i*换成*j*得:

$$\frac{\partial \omega'_j}{\partial t} + \overline{u^k \omega'_{j,k}} + \overline{u'^k \omega'_{j,k}} = \overline{\omega^k u'_{j,k}} + \overline{\omega'^k u_{j,k}} - \overline{\omega'^k u'_{j,k}} + \overline{u'^k \omega'_{j,k}} + \nu \omega'_{j,kk} \quad (6)$$

式(5) × ω'<sub>j</sub> + (6) × ω'<sub>i</sub>, 然后再取平均,化简得涡漩雷诺应力方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\omega'_i \omega'_j}}{\partial t} + \overline{u^k (\omega'_i \omega'_j)_{,k}} = & [-\overline{u'^k (\omega'_{i\omega'j})_{,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_{i'j,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_{j'i,k}} \\ & + \nu (\overline{\omega'^k \omega'_{j,kk}} + \overline{\omega'_{j,kk}})] + (\overline{u'^k \omega'_i \omega'_{j,k}} + \overline{u'^k \omega'_j \omega'_{i,k}}) \\ & + (\overline{\omega'^k \omega'_i u'_{j,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_j u'_{i,k}}) + \overline{\omega'^k (\omega'_{j'u'_{i,k}} + \omega'_{i'u'_{j,k}})} \end{aligned} \quad (7)$$

为了叙述方便,作如下简记

$$\pi_1 = [-\overline{u'^k (\omega'_i \omega'_j)_{,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_{i'j,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_{j'i,k}} + \nu (\overline{\omega'^k \omega'_{j,kk}} + \overline{\omega'_{j,kk}})] \quad (8)$$

$$\pi_2 = \overline{u'^k \omega'_i \omega'_{j,k}} + \overline{u'^k \omega'_j \omega'_{i,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_i u'_{j,k}} + \overline{\omega'^k \omega'_j u'_{i,k}} + \overline{\omega'^k (\omega'_{j'u'_{i,k}} + \omega'_{i'u'_{j,k}})} \quad (9)$$

我们称方程式(7)为涡漩雷诺应力方程。π<sub>1</sub>中每一项都是三阶相关矩。三阶相关矩在二次流动中使二次涡漩相互削弱,从而造成了大量的能量损失。π<sub>2</sub>中有广义雷诺应力项和随位移变化的项,所以π<sub>2</sub>各项使得二次涡漩不断增强,因此π<sub>2</sub>中各项也造成大量的能量损失。总之π<sub>1</sub>和π<sub>2</sub>都是能量损失的根源。由上分析结果可以推广得:奇数阶涡量相关矩都是使二次涡漩相互削弱,是圆形直管道内二次流不断消失的主要原因之一,因此形成大量的能量损失;偶数阶相关矩都有广义雷诺应力项和位移变化项,使二次流不断增强,是圆形弯曲管道和方形管道内二次流不断增强的主要原因之一,所以偶数阶相关矩也造成大量的能量损失。总之,二次流的增强与削弱都是能量损失的根源。

## 2 方程封闭性的研究

流体运动方程中,连续性方程(1个),涡漩运动方程(3个),涡漩雷诺应力方程(9个),总共13个方程。但是方程中未知数的个数远远大于方程组的个数。因此,要求解涡漩雷诺应力方程是非常困难的。本文揭开了涡漩相关矩与能量损失的关系,需要进一步对此进行深入研究。

## 3 结 论

本文从理论上研究了二次流涡漩的存在机理,推导出了涡漩雷诺应力方程,提出了能量损失与涡量相关矩理论,同时探讨了涡漩雷诺应力的封闭性问题。

## 参 考 文 献

- 1 胡国清. 液压阀流道能耗研究. 博士学位论文. 成都科技大学, 1993.
- 2 潘文全. 流体力学基础. 机械工业出版社. 1985.
- 3 Идельчик. П. Е. Гидравлические. Сопротивления. Госизнегиздат, Москва. 1954.
- 4 陈景仁. 湍流模型及有限分析法. 上海交通大学出版社, 1989.
- 5 过增元. 热流体学. 清华大学出版社. 1992.
- 6 郑邦民. 流体力学. 水利电力出版社. 1989.

## The Theoretical Study on the Relationship between the Energy Loss and the Vortex Correlation Moment

*Hu Guo-qing*                      *Luo Ren-fei*

(Department of Scientific Instrumentation and Precision Mechanical Engineering,  
Xiamen University, Xiameng 361005)

**Abstract** The paper studied the fundament from the secondary flow create the energy loss to research and attain the relationship between the energy loss and the vortex correlation moment. The vortex Reynolds stress equation was put forward, it provides a new basis for further studies the fluid energy loss.

**Key words** energy loss, vortex correlation moment, vortex Reynolds stress equation.