

# 超冷量子气体的统计性质

苏国珍\*, 陈金灿

(厦门大学物理与机电工程学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 近年来超冷量子气体的研究取得了一系列重大实验突破, 其中包括玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的实现、超冷简并费米气的获得以及分子 BEC 的成功观测等, 同时, BEC 及简并费米气体相关理论也成为热门的研究课题. 结合本课题组近期的部分研究工作简要地阐述超冷量子气体的统计性质, 主要内容包括量子气体的尺度效应、外势的约束作用、粒子间相互作用的影响、 $q$  形变量子气体的低温特性和非广延统计等. 所得结论对进一步深入认识量子气体的低温特性, 揭示各种宏观量子效应的实质具有一定的理论价值.

**关键词:** 超冷量子气体; 尺度效应; 外势; 相互作用; 非广延统计

中图分类号: O 414

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2011)02-0217-10

低温下的物质系统, 其性质受量子统计规律支配. 对于玻色(Bose)系统, 当温度低于某一临界温度  $T_c$  时, 将出现宏观数量的粒子在基态上凝聚, 这种现象称为玻色-爱因斯坦凝聚(BEC). 对于费米(Fermi)系统, 虽然没有象玻色系统一样产生 BEC, 但在低温下也表现出其所独有的量子简并的特征.

自 1925 年爱因斯坦从理论上预言 BEC 现象以来, 科学家一直致力于寻找 BEC 的实验证据. 1995 年, 美国的三个研究小组应用外势约束、激光冷却和蒸发冷却等技术先后在碱金属铷( $^{87}\text{Rb}$ )、钠( $^{23}\text{Na}$ )和锂( $^7\text{Li}$ )原子蒸气中观测到 BEC 现象<sup>[1-3]</sup>. 1999 年, 美国 JILA (Joint Institute Laboratory Astrophysics) 小组的 DeMarco 和 Jin 通过同时捕获磁阱中处于两个 Zeeman 子能级( $m_F = 7/2$  和  $m_F = 9/2$ )的钾( $^{40}\text{K}$ )原子, 将  $^{40}\text{K}$  费米子冷却至低于 300 nK (约为系统费米温度的一半)<sup>[4]</sup>. 在该温度下, 费米能以下的量子态约有 60% 为费米子所占据, 系统呈现出明显的量子简并特征. 通过测量能量和动量分布, 他们获得了与费米-狄拉克(Fermi-Dirac)统计相吻合的实验结果. 在 DeMarco 和 Jin 获得  $^{40}\text{K}$  简并费米气后不久, 锂( $^6\text{Li}$ )原子简并费米气也在实验中获得实现<sup>[5-7]</sup>. 2003 年, JILA

小组将  $^{40}\text{K}$  原子气体冷却到 250 nK 后, 采用磁场和激光控制使钾原子成对, 从而实现了由费米子对组成的分子 BEC<sup>[8-10]</sup>. 此后,  $^6\text{Li}$  分子 BEC 也在 MIT (Massachusetts Institute of Technology) 和其他一些研究小组相继获得成功<sup>[11-14]</sup>. 分子 BEC 的实现是继获得原子 BEC 之后的又一重大成就.

BEC 和超冷简并费米气在实验上获得成功实现, 也在理论物理学界兴起了研究超冷量子气体的热潮. 本课题组自 1996 年起跟踪国内外 BEC 及简并费米气体的研究动态, 并对低温下量子气体的统计性质作了一系列探讨, 主要内容包括量子气体的尺度效应、外势的约束作用、粒子间相互作用的影响、 $q$  形变量子气体的低温特性和非广延统计等. 本文对本课题组近期在这方面的研究工作与成果作简要的阐述.

## 1 量子气体的尺度效应

统计物理教科书对自由理想的粒子系统的性质有较详尽的讨论<sup>[15-16]</sup>, 然而, 这些讨论都是针对满足热力学极限条件, 即含有大量粒子数、具有宏观尺度的系统. 对于这类系统, 边界对系统性质的影响可忽略不计, 只要粒子数密度保持不变, 描述系统性质的任一强度量与系统的尺度及边界无关. 然而对于不满足热力学极限条件的有限尺度系统, 情况则有所不同, 此时系统的性质与系统大小、形状及边界条件密切相关.

对于约束在边长为  $L_i (i = 1, 2, \dots, D)$  的  $D$  维方形盒中的理想量子气体, 利用欧拉-麦克劳林(Euler-MacLaurin)求和公式<sup>[17]</sup>

收稿日期: 2010-12-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(10275051, 10575084, 10875100); 教育部博士学科点专项科研基金(20050384005, 20100121110024); 福建省自然科学基金项目(A1010016)

\* 通信作者: gzs@xmu.edu.cn

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(n) dn + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{12}F'(0) + \frac{1}{720}F'''(0) + \dots, \quad (1)$$

可得系统的巨配分函数

$$\ln \Xi = \ln \left[ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_D=1}^{\infty} \ln \left[ 1 + z \exp \left( - \frac{\beta h^2}{8m} \sum_{i=1}^D \frac{n_i^2}{L_i^2} \right) \right] \right] = \frac{V_D}{\lambda^D} \left[ h_{D/2+1}(z) - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{L} h_{D/2+1/2}(z) \right], \quad (2)$$

式中  $h$  为普朗克(Planck)常数,  $m$  为粒子质量,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为系统温度,  $z = \exp(\beta\mu)$  为逸度,  $\mu$  为系统化学势,  $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$  为热波长,  $V_D = \prod_{i=1}^D L_i$  为系统的体积,  $L = (\sum_{i=1}^D 1/L_i)^{-1}$ ,

$$h_l(z) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \frac{x^{l-1} dx}{z^{-1} \exp(x) + 1}, \quad (3)$$

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt$  为  $\Gamma$  函数, 符号“ $\ln$ ”取“-”和“+”分别表示玻色和费米系统, 自旋简并度取为 1. 式(2)忽略了基态对巨配分函数的贡献, 因此只适用于费米系统和 BEC 临界温度以上的玻色系统.

从式(2)出发, 可得系统压强和内能的表达式<sup>[18]</sup>

$$p_i = \frac{N k_B T}{V_D} \left\{ \frac{h_{D/2+1}(z_0)}{h_{D/2}(z_0)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{D/2-1/2}(z_0)}{h_{D/2-1}(z_0)} - \left( 1 - \frac{L}{L_i} \right) \frac{h_{D/2+1/2}(z_0)}{h_{D/2}(z_0)} \right] \frac{\lambda}{L} \right\}, \quad (4)$$

$$E = \frac{D}{2} N k_B T \left\{ \frac{h_{D/2+1}(z_0)}{h_{D/2}(z_0)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{D/2-1/2}(z_0)}{h_{D/2-1}(z_0)} - \frac{D-1}{D} \frac{h_{D/2+1/2}(z_0)}{h_{D/2}(z_0)} \right] \frac{\lambda}{L} \right\}, \quad (5)$$

其中参数  $z_0$  满足

$$N = \frac{V_D}{\lambda^D} h_{D/2}(z_0), \quad (6)$$

$N$  为系统的总粒子数,  $p_i$  为作用于与长度为  $L_i$  的棱边垂直的容器壁的压强.

从式(4)~(6), 可得以下结果:

1) 有限尺度对各热力学量相对修正量的数量级为  $\lambda L \sim (\lambda l)/N^{1/D}$ , 其中  $l = (V_D/N)^{1/D}$  为粒子间的平均距离. 对简并量子系统,  $\lambda \sim l$ , 有限尺度修正的数量级为  $1/N^{1/D}$ , 对经典气体,  $\lambda \ll l$ ,  $\lambda L \ll 1/N^{1/D}$ , 有限尺度修正可忽略不计.

2) 当  $L_i \neq L_j$  时,  $p_i \neq p_j$ , 即压强表现出各向异性的特征.

3) 在粒子数密度  $n$  和温度  $T$  给定的条件下, 压强  $p_i$  还与系统的尺度  $L$  有关,  $p_i$  不再具有强度量的特征; 类似地, 在  $n$  和  $T$  给定的条件下, 内能  $E$  也不再与总粒子数  $N$  成正比, 即  $E$  不再是广延量. 所以有限尺度效应使得系统产生非广延的特征.

## 2 处理外势约束的一种新方法

统计物理教科书中所研究的量子系统, 大部分是自由理想的粒子系统. 然而, 在很多情况下, 粒子要受到各种外势的作用. 外势的存在使得约束系统的统计物理问题变得较为复杂. 为此, 我们提出了处理外势约束的一种等效方法, 即把约束系统转化为自由系统来处理, 从而使得部分复杂问题得到简化.

对约束在  $D$  维空间幂函数型外势

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^D U_i \left| \frac{x_i}{L_i} \right|^{t_i} \quad (7)$$

中的非相对论理想量子气体, 在热力学极限近似下, 巨配分函数可表为<sup>[19]</sup>

$$\ln \Xi = \ln \Xi_0 + \frac{1}{\chi^{D+2\eta}} \left( \frac{h^2}{2\pi m} \right)^{\eta} \left[ \prod_{i=1}^D \frac{(2L_i) \Gamma(1/t_i + 1)}{U_i^{1/t_i}} \right] h_{D/2+\eta-1}(z), \quad (8)$$

式中  $L_i, U_i$  和  $t_i$  为表征外势特性的常数,  $\eta = \sum_{i=1}^D 1/t_i$ ,  $\ln \Xi_0$  为基态对  $\ln \Xi$  的贡献, 自旋简并度取 1.

引入参量

$$D' = D + 2\eta, \quad (9)$$

$$V_{D'} = \left( \frac{h^2}{2\pi m} \right)^{\eta} \prod_{i=1}^D \frac{(2L_i) \Gamma(1/t_i + 1)}{U_i^{1/t_i}}, \quad (10)$$

则式(8)可表为

$$\ln \Xi = \ln \Xi_0 + \frac{V_{D'}}{\lambda^{D'}} h_{D'/2+1}(z). \quad (11)$$

式(11)与约束在  $D'$  维空间体积为  $V_{D'}$  的刚性盒子中的理想量子气体的巨配分函数的表达式一致. 这表明, 幂函数型外势对粒子的约束作用等效于一个刚性盒子对粒子的约束作用, 该等效盒子的空间维数  $D'$  和体积  $V_{D'}$  分别由式(9)、(10)给出, 它们与外势的空间维数  $D$ 、外势参数  $L_i, U_i$  和  $t_i$  以及粒子质量有关. 这一等效关系允许我们把受外势约束的系统转化为自由系统来处理, 使得外势约束系统的性质可直接从人们熟悉的自由系统的性质直接导出. 以下给出几个实例.

### 2.1 BEC 产生的条件及临界温度

对满足热力学极限条件的自由理想玻色气体(非

相对论,下同), BEC 只能在维数  $D > 2$  的空间产生. 根据上述等效关系可以推断, 对约束在  $D$  维幂次型外势中的理想玻色气体, BEC 产生的条件为

$$D' = D + 2 \sum_{i=1}^D \frac{1}{t_i} > 2. \quad (12)$$

式(12)与文献[20]的结果一致. 特别地, 若外势为简谐势( $t_i = 2$ ), 则 BEC 产生条件为  $D > 1$ .

类似地, 根据  $D$  维自由空间中理想玻色气体 BEC 临界温度的表达式<sup>[21]</sup>, 可得约束在  $D$  维幂次型外势中的理想玻色气体的 BEC 临界温度为

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left[ \frac{N}{V_D \zeta(D'/2)} \right]^{2/D'} = \frac{1}{k_B} \left[ \frac{N h^D}{\zeta(\eta + D/2) (2\pi m)^{D/2} \prod_{i=1}^D U^{1/t_i}} \right]^{1/(D/2 + \eta)} \frac{1}{(2L_i) \Gamma(1/t_i + 1)}, \quad (13)$$

其中  $\zeta(x) = \sum_{l=1}^{\infty} 1/l^x$  为黎曼-泽塔(Riemann-zeta)函数. 式(13)与文献[20]中临界温度的表达式一致.

### 2.2 玻色和费米气体热容的等效性

研究表明, 在二维空间中, 自由理想的玻色和费米气体的定容热容是一致的<sup>[22-23]</sup>. 由幂次型外势与刚性盒子的等效关系可推断, 对约束在  $D$  维幂次型外势中的理想玻色和费米气体, 当满足

$$D' = D + 2 \sum_{i=1}^D \frac{1}{t_i} = 2 \quad (14)$$

时, 两者的热容是一致的. 根据式(14)可得, 约束在一维简谐势中的理想玻色气体和费米气体具有相同的热容.

### 2.3 可逆绝热过程方程

对  $D$  维空间中的自由理想气体(玻色或费米气体), 在可逆绝热过程中, 温度和体积满足  $TV_b^{2/D} = \text{常量}$ . 由此可知, 对约束在  $D$  维幂次型外势中的理想气体, 在可逆绝热过程中系统的温度和势参数  $L_i, U_i$  和  $t_i$  应满足

$$TV_b^{2/D} = T \left[ \left( \frac{h^2}{2\pi m} \right)^\eta \prod_{i=1}^D \frac{(2L_i) \Gamma(1/t_i + 1)}{U^{1/t_i}} \right]^{1/(D/2 + \eta)} = \text{常量}. \quad (15)$$

式(15)表明, 在绝热过程中通过调整势参数  $L_i, U_i$  和  $t_i$ , 可改变系统的温度, 这一技术在 MIT 被有效地应用于实现 BEC 的实验中<sup>[24]</sup>.

## 3 弱相互作用玻色系统的 LDA 理论分析

对于实际系统, 粒子间都存在相互作用, 随着密度

的增加, 相互作用对系统性质的影响将不可忽略. 事实上, 对于大部分系统, 粒子间相互作用是影响系统性质的一个重要因素.

原则上, 应用统计物理中的系综理论可以处理粒子间存在相互作用的问题, 然而, 在数学分析上常遇到严重的困难. 为此人们发展了多种处理相互作用多粒子体系的近似方法, 其中之一是杨振宁、黄克逊、李政道和 Luttinger 等在 50 年代后期发展起来的硬球模型<sup>[25-28]</sup>. 该模型将 1936 年费米提出的“赝势法”应用于研究弱相互作用量子气体, 获得了一些重要的结论.

杨振宁、黄克逊等的理论开始时只用于无外势约束下的均匀系统. 20 世纪 90 年代, 邹祖德、杨振宁和余理华采用局域密度近似(LDA)把该理论用于研究有外势约束的非均匀系统<sup>[29-30]</sup>, 得到了与实验相符的结果.

当存在外势时, 粒子在空间的分布是不均匀的, 即  $n = n(\mathbf{r})$ . 若系统的粒子数足够大, 粒子的能级间隔远小于粒子的动能, 可以将空间分成许多小格, 同一格中外势  $U(\mathbf{r})$  和粒子数密度  $n(\mathbf{r})$  均可视为常数, 因而每个小格可视为一个含有大量粒子的均匀子系统, 这样的理论处理方法称为 LDA.

在局域密度近似下, 系统的化学势  $\mu$  和内能密度  $\varepsilon(\mathbf{r})$  可分别表为

$$\mu = \mathcal{W}[n(\mathbf{r})] + U(\mathbf{r}), \quad (16)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathcal{E}[n(\mathbf{r})] + n(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}), \quad (17)$$

其中  $\mathcal{W}[n(\mathbf{r})]$  和  $\mathcal{E}[n(\mathbf{r})]$  分别为无外势时密度为  $n(\mathbf{r})$  的均匀系统的化学势和内能密度. 若粒子间存在硬球势相互作用, 且只计入 s 波散射,  $\mathcal{W}[n(\mathbf{r})]$  和  $\mathcal{E}[n(\mathbf{r})]$  可分别表为<sup>[28]</sup>

$$\mathcal{W}[n(\mathbf{r})] = \begin{cases} k_B T \{ \ln z_0[n(\mathbf{r})] + 4a\lambda^2 n(\mathbf{r}) \} \\ [n(\mathbf{r}) < nc], \\ 2a\lambda^2 k_B T [nc + n(\mathbf{r})] \\ [n(\mathbf{r}) \geq nc]. \end{cases} \quad (18)$$

$$\mathcal{E}[n(\mathbf{r})] = \begin{cases} k_B T \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}[z_0[n(\mathbf{r})]] + 2a\lambda^2 n^2(\mathbf{r}) \right\} [n(\mathbf{r}) < nc], \\ k_B T \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^3} \zeta(5/2) + a\lambda^2 [2nc^2 - n(\mathbf{r})nc + n^2(\mathbf{r})] \right\} [n(\mathbf{r}) \geq nc]. \end{cases} \quad (19)$$

式中  $nc = \zeta(3/2)/\lambda^3$  为均匀系统的 BEC 临界密度,  $a$  为 s 波散射长度(为简单起见, 本文只讨论  $a > 0$ , 即粒子间存在排斥相互作用的情况),  $z_0[n(\mathbf{r})]$  为  $\mathbf{r}$  处无相互作用逸度, 满足

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}[z_0[n(\mathbf{r})]]. \quad (20)$$

根据式(16),系统的粒子数密度可表为

$$n(r) = \mu^{-1} [\mu - U(r)], \tag{21}$$

从而总粒子数可表为

$$N = \int n(r) dr = \int \mu^{-1} [\mu - U(r)] dr, \tag{22}$$

式中  $\mu^{-1}(x)$  表示  $\mu(x)$  的反函数. 只要已知外势  $U(r)$  和总粒子数  $N$ , 由式(22)和(21)可分别解得系统的化学势  $\mu$  和粒子数密度  $n(r)$ ; 将  $n(r)$  代入式(17)可得到内能密度  $\varepsilon(r)$ , 通过计算对空间的积分, 即

$$E = \int \varepsilon(r) dr = \int \{\varepsilon[n(r)] + n(r) U(r)\} dr, \tag{23}$$

可得到系统内能的表达式.

对于约束在如式(7)所示的幂次型外势中的弱相互作用玻色气体, 通过上述方法可求得, 当  $T > T_c$  时系统的总粒子数、化学势和内能分别为<sup>[31]</sup>

$$N = \frac{V}{\lambda^3} \{g_{\eta+3/2}(z) + \frac{a}{\lambda} [4g_{3/2}(z)g_{\eta+1/2}(z) - 4G_{3/2, 1/2, \eta}(z)]\}, \tag{24}$$

$$\mu = k_B T [\ln z + \frac{4a}{\lambda} g_{3/2}(z)], \tag{25}$$

$$E = \frac{V k_B T}{\lambda^3} \{(\eta + \frac{3}{2})g_{\eta+5/2}(z) + \frac{a}{\lambda} [(4\eta + 6)g_{3/2}(z)g_{\eta+3/2}(z) - (4\eta + 8)G_{3/2, 1/2, \eta+1}(z)]\}, \tag{26}$$

其中

$$\eta = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i}, \tag{27}$$

$$V = \prod_{i=1}^3 \frac{(2L_i)\Gamma(1/t_i + 1)}{(\beta U_i)^{1/t_i}}, \tag{28}$$

$$G_{l,p,q}(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\infty} g_l(xe^{-t}) g_p(xe^{-1}) t^{q-1} dt \xrightarrow{x \leq 1} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{x^{i+j}}{i! j^p (i+j)^q}. \tag{29}$$

从以上各式可以看出, 当  $T > T_c$  时, 弱相互作用对各热力学量相对修正量的数量级为  $a/\lambda$

当  $z \rightarrow 1$  时, 系统所对应的温度为 BEC 临界温度  $T_c$ . 从式(24)可得

$$T_c = T_{c0} \left[ 1 - \frac{4a}{\lambda c_0} \frac{\zeta(3/2)\zeta(\eta+1/2) - G_{3/2, 1/2, \eta}(1)}{(\eta+3/2)\zeta(\eta+3/2)} \right], \tag{30}$$

式中

$$T_{c0} = \frac{1}{k_B} \left[ \left( \frac{h^2}{2\pi m} \right)^{3/2} \frac{N}{\zeta(\eta+3/2)} \prod_{i=1}^3 \left[ \frac{U^{1/t_i}}{(2L_i)\Gamma(1/t_i + 1)} \right]^{1/(\eta+3/2)} \right] \tag{31}$$

为不考虑粒子间相互作用时系统的临界温度<sup>[20]</sup>,  $\lambda_{c0} = h / \sqrt{2\pi m k_B T_{c0}}$ .

特别地, 对于谐振外势,  $t_i = 2, \eta = 3/2, U_i/L_i^4 = m\omega_i^2/2$ , 式(30)简化为

$$T_c = T_{c0} \left[ 1 - \frac{4a}{3\lambda c_0} \frac{\zeta(2)\zeta(3/2) - G_{3/2, 1/2, 3/2}(1)}{\zeta(3)} \right], \tag{32}$$

其中  $T_{c0} = (t \omega k_B) [N / \zeta(3)]^{1/3}$ ,  $t = h/2\pi, \omega = \left( \prod_{i=1}^3 \omega_i \right)^{1/3}$ . 取 Ensher 的实验数据<sup>[32]</sup>, 即  $\omega_3 = 2343.63s^{-1}, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 / \sqrt{8}, m = 87(a.u.), N = 40000$ , 可得  $T_c \approx 0.95 T_{c0} \approx 273 nK$ , 与实验结果<sup>[32]</sup>很好相符.

当  $T < T_c$  时, 系统的总粒子数、化学势和内能可分别表为<sup>[31]</sup>

$$N = N_s + \frac{V}{\lambda^3} \{h_{\eta+3/2}(x_c) + \frac{x_c(3/2)x_c^{\eta}}{\Gamma(\eta+1)} + \frac{a}{\lambda} [4\zeta(3/2)\zeta(\eta+1/2) - 4G_{3/2, 1/2, \eta}(1)]\}, \tag{33}$$

$$E = \frac{V k_B T}{\lambda^3} \{(\eta + \frac{3}{2})h_{\eta+5/2}(x_c) + \frac{\zeta(5/2)(2\eta+3)x_c^{\eta}}{2\Gamma(\eta+1)} + \frac{\zeta(3/2)(2\eta+1)x_c^{\eta+1}}{2(\eta+1)\Gamma(\eta+1)} + \frac{\lambda}{a} \frac{x_c^{\eta+2}}{2(\eta+2)\Gamma(\eta+1)} + \frac{a}{\lambda} \frac{2\zeta^2(3/2)x_c}{\Gamma(\eta+1)} + \frac{a}{\lambda} [(4\eta+6)\zeta(3/2)\zeta(\eta+3/2) - (4\eta+8)G_{3/2, 1/2, \eta+1}(1)]\}, \tag{34}$$

式中

$$N_s = \frac{V}{a\lambda^2} \frac{x_c^{\eta+1}}{2(\eta+1)\Gamma(\eta+1)} \tag{35}$$

为基态粒子占有数,

$$h_{l,p}(x) = \frac{1}{\Gamma(l)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(jx)\Gamma(L, jx)}{j^{l+p}}, \tag{36}$$

$\Gamma(l, b) = \int_b^{\infty} \exp(-t) t^{l-1} dt$  为余 Gamma 函数,  $x_c = U_c/k_B T, U_c$  为满足  $n(r) = n_c$  处的外势值.

若只保留到弱相互作用的一级修正, 则根据以上各式可得  $T < T_c$  时基态粒子占有率、化学势和内能与温度的关系, 结果分别为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_{c0}} \right)^{\eta+3/2} - \rho \frac{\zeta(\eta+1/2)}{\zeta(\eta+3/2)} \left( \frac{T}{T_{c0}} \right)^{\eta+1/2} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c0}} \right)^{\eta+3/2} \right]^{1/(\eta+1)}, \tag{37}$$

$$\mu = \rho_{k_B T c_0} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^{\eta+3/2} \right]^{1/(\eta+1)}, \quad (38)$$

$$E = N k_B T c_0 \left\{ \eta + \frac{3}{2} \frac{\zeta(\eta+5/2)}{\zeta(\eta+3/2)} \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^{\eta+5/2} + \rho \left[ \frac{2\eta^2 + 5\eta + 4}{2(\eta+2)} \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^{\eta+3/2} + \frac{\eta+1}{\eta+2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^{\eta+3/2} \right]^{1/(\eta+1)} \right\}, \quad (39)$$

式中

$$\rho = \frac{\mu|_{T=0}}{k_B T_{c_0}} = \left[ 2(\eta+1) \Gamma(\eta+1) \zeta \left( \eta + \frac{3}{2} \right) \left( \frac{a}{\lambda_{c_0}} \right) \right]^{1/(\eta+1)} \propto \left( \frac{a}{\lambda_{c_0}} \right)^{1/(\eta+1)} \quad (40)$$

为反映粒子间相互作用强度的物理量. 从以上各式可以看出, 当  $T < T_c$  时, 弱相互作用对各热力学量相对修正量的数量级为  $\rho \sim (a/\lambda_{c_0})^{1/(\eta+1)}$ .

对于谐振外势, 上述各式简化为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^3 - \rho \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^3 \right]^{2/5}, \quad (41)$$

$$\mu = \rho_{k_B T_{c_0}} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^3 \right]^{2/5}, \quad (42)$$

$$E = N k_B T_{c_0} \left\{ \frac{3\zeta(4)}{\zeta(3)} \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^4 + \frac{1}{7} \left[ 5 + 16 \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^3 \right] \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_{c_0}} \right)^3 \right]^{2/5} \right\}, \quad (43)$$

其中  $\rho$  简化为

$$\rho = \frac{15^{2/5} \zeta^{1/3}(3)}{2} N^{1/15} \left( \frac{a}{a_h} \right)^{2/5}, \quad (44)$$

式中  $a_h = \sqrt{\hbar/m\omega}$  为简谐势的特征长度. 从以上各式可以看出, 当  $T < T_c$  时, 弱相互作用对简谐势约束下玻色气体各热力学量相对修正量的数量级为  $\rho \sim (a/a_h)^{2/5}$ , 这与文献[33-35]得到的结果一致.

令  $T = 0$ , 根据以上结果可得到弱相互作用玻色气体的基态性质. 如在式(42)、(43)中令  $T = 0$ , 可得系统的基态化学势和基态能

$$\mu|_{T=0} = \left[ \frac{a\hbar^2}{\pi m} \right] \frac{N(\eta+1)\Gamma(\eta+1)}{\prod_{i=1}^3 (2L_i)\Gamma(1/t_i+1)/U_i^{1/t_i}}, \quad (45)$$

$$E|_{T=0} = N \left[ \frac{\eta+1}{\eta+2} \right] \left[ \left[ \frac{a\hbar^2}{\pi m} \right] \frac{N(\eta+1)\Gamma(\eta+1)}{\prod_{i=1}^3 (2L_i)\Gamma(1/t_i+1)/U_i^{1/t_i}} \right]^{1/(\eta+1)}. \quad (46)$$

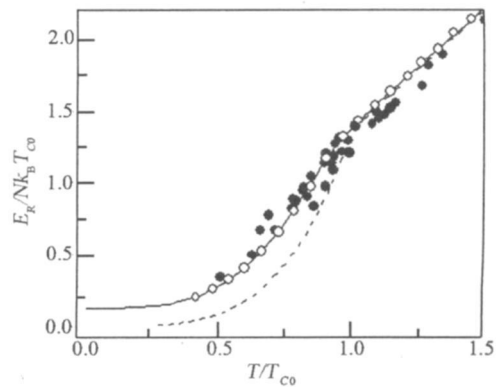
对简谐势, 式(45)和(46)分别简化为

$$\mu|_{T=0} = \frac{\hbar\omega}{2} \left[ \frac{15Na}{a\hbar} \right]^{2/5}, \quad (47)$$

$$E|_{T=0} = \frac{5N\hbar\omega}{14} \left[ \frac{15Na}{a\hbar} \right]^{2/5}. \quad (48)$$

式(47)、(48)与文献[36]应用平均场理论得到的结果相符.

图 1 给出简谐势约束下弱相互作用玻色气体的“释放能” $E_R$  (定义为外势撤去后系统的内能, 与 Ehsheer 等在实验中测量到的能量相对应) 与温度的关系曲线. 从图中可以看出, 粒子间的排斥作用使得低温 ( $T < T_c$ ) 下系统的内能显著增大, 而对高温 ( $T > T_c$ ) 下系统内能的影响小得多. 与 Ehsheer 等的实验结果<sup>[32]</sup> 及 Minguzzi 等数值求解 GP 方程的结果<sup>[37]</sup> 作比较, 不难看出, 我们的结果与 Ehsheer 的实验结果基本相符, 与 Minguzzi 的数值结果几乎一致.



实线为基于 LDA 所得的结果, 长虚线为忽略相互作用时的结果, 实心点为 Ehsheer 等的实验结果<sup>[32]</sup>, 空心点为 Minguzzi 等数值求解 GP 方程的结果<sup>[37]</sup>.

图 1 “释放能”  $E_R/N k_B T$  与约化温度  $T/T_{c_0}$  的关系  
Fig. 1 Release energy  $E_R/N k_B T$  as a function of reduced temperature  $T/T_{c_0}$

## 4 $\eta$ 形变 BEC

$\eta$ 形变玻色子理论是由 Kulish 和 Sklyanin 基于在研究 Yang-Baxter 方程可解问题中引入的  $\eta$ 形变代数和量子群理论而创立起来的<sup>[38-39]</sup>. 经过许多学者努力, 该理论得到了不断的发展与完善<sup>[40-42]</sup>, 并在许多领域中获得广泛的应用, 其中包括“任意子”物理 (anyon physics)<sup>[43]</sup>、不连续时空量子力学<sup>[44]</sup>、多原子分子振动<sup>[45]</sup>及超流薄膜漩涡的研究<sup>[46]</sup>等. 伴随着 BEC 在实验中的实现, 研究  $\eta$ 形变玻色系统的 BEC 特性, 也成为许多学者关注的问题<sup>[47-48]</sup>.

基于  $q$ -形变玻色子代数, Tuszynski 等<sup>[47]</sup> 导出了理想  $q$ -形变玻色-爱因斯坦统计分布

$$f_{k,q} = \frac{1}{2 \ln q} \ln \frac{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - q^{-1}}{z^{-1} \exp(\beta \varepsilon_k) - q}, \quad (49)$$

式中  $q \in \mathcal{R}$  为形变参数,  $\varepsilon_k$  为第  $k$  个单粒子态的能量.

从式(49)出发, 我们研究了  $D$  维空间中能谱为  $\varepsilon_k = ap^s$  (其中  $a$  和  $s$  为正常数) 的  $q$ -形变理想玻色气体的 BEC 特性, 导出了系统的 BEC 临界温度和定容热容的解析表达式<sup>[48]</sup>:

$$T_{c,q} = \frac{1}{k_B} \left[ \frac{N h^D a^{D/s} \Gamma(D/2 + 1)}{\pi^{D/2} \Gamma(D/s + 1) \zeta_q(D/s + 1) V_D} \right]^{s/D}, \quad (50)$$

$$C_V = \begin{cases} N k_B \left[ \frac{D}{s} \left( \frac{D}{s} + 1 \right) \frac{G_{D/s+2,q}(z)}{G_{D/s+1,q}(z)} - \frac{D^2}{s^2} \frac{G_{D/s+1,q}(z)}{G_{D/s,q}(z)} \right] & (T > T_{c,q}), \\ N k_B \frac{D}{s} \left( \frac{D}{s} + 1 \right) \frac{\zeta_q(D/s + 2)}{\zeta_q(D/s + 1)} \left( \frac{T}{T_{c,q}} \right)^{D/2} & (T \leq T_{c,q}). \end{cases} \quad (51)$$

式中

$$g_{l,q}(x) = \frac{1}{2 \ln q} \sum_{j=1}^{\infty} (q^j - q^{-j}) \frac{x^j}{j^l} \quad (52)$$

称为  $q$ -形变玻色积分,  $\zeta_q(l) = g_{l,q}(1/q)$  为  $q$ -形变 Riemann-zeta 函数, 速度  $z$  满足

$$N = \frac{V_D}{\lambda^D} g_{D/s+1,q}(z), \quad (53)$$

$$\lambda = \left[ \frac{\Gamma(D/2 + 1)}{\Gamma(D/s + 1)} \right]^{1/D} \left( \frac{ah^s}{\pi^{s/2} k_B T} \right)^{1/s} \quad (54)$$

为广义热波长<sup>[49]</sup>.

图2给出  $D/s$  不同时, 约化临界温度  $T_{c,q}/T_0$  随形变参数  $q$  的变化规律, 其中

$$T_0 = \frac{ah^s}{\pi^{s/2}} \left[ \frac{N}{V} \frac{\Gamma(D/2 + 1)}{\Gamma(D/s + 1)} \right]^{s/D}. \quad (55)$$

我们发现,  $q$ -形变总是使得 BEC 临界温度升高, 而且  $q$  值偏离 1 越大, 临界温度越高. 对于  $D/s$  较小的系统,  $q$ -形变可使 BEC 临界温度比正常玻色系统 ( $q=1$ ) 的大得多; 而对于  $D/s$  较大的系统,  $q$ -形变对  $T_{c,q}$  的影响很小.

图3给出定容热容  $C_V/Nk_B$  与约化温度  $T/T_0$  的关系曲线, 其中  $D/s = 1.5$ . 从图3可以看出, 当  $D/s = 1.5$  时, 热容曲线在临界点不连续. 根据式(51)可得

$$\Delta C_V = C_{V,T^+} - C_{V,T^+} = 4Nk_B \frac{\zeta_q(5/2)}{\zeta_q(3/2)}. \quad (56)$$

式(56)表明,  $\Delta C_V$  随着  $q$  值的减小而减小, 特别地, 当  $q \rightarrow 1$  时,  $\Delta C_V \rightarrow 0$ , 即热容在临界点连续.

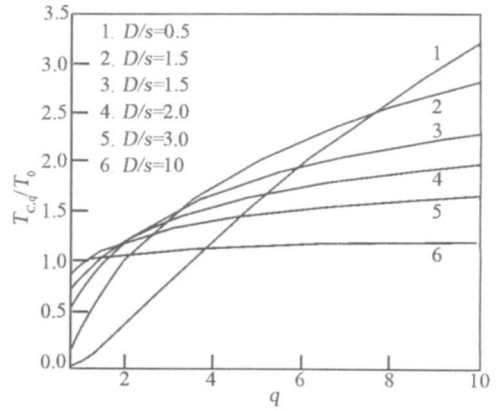


图2  $D/s$  不同时 BEC 临界温度与形变参数  $q$  的关系  
Fig. 2 Dependence of critical temperature of BEC on the deformation parameter  $q$  for different  $D/s$

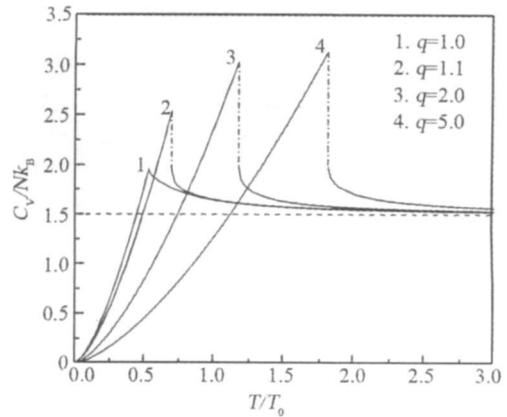


图3  $D/s = 1.5$  时  $q$ -形变玻色系统热容与温度的关系  
Fig. 3 Heat capacity as a function of temperature for a  $q$ -deformed boson system of  $D/s = 1.5$

## 5 非广延统计与广义 BEC

### 5.1 非广延统计简介

非广延统计物理是传统的广延统计物理的一个延伸和拓展, 主要用于处理包含长程相互作用或有记忆效应的复杂系统. 近年来非广延统计在物理学的诸多领域都得到了广泛的发展和运用, 其中包含长程相互作用的自引力系统<sup>[50]</sup>、纯电子等离子体<sup>[51]</sup>、非线性动力学系统<sup>[52]</sup>、Lvy 型奇异分布<sup>[53]</sup>等等. 非广延统计很好地解释了一些无法用传统的统计理论解释的实验现象, 已成为当前国际基础物理研究的一大热点. 由于对具有复杂内部作用的系统有不同的处理方法, 非广延统计物理已经发展出许多分支, 如 Tsallis 统计<sup>[54]</sup>、非完整统计<sup>[55]</sup>、卡帕统计、超统计等等, 其中 Tsallis 统计被认为是可直接用于分析实际现象的非广延理论, 已受到广泛的关注, 成为非广延统计物理研究的热点.

Tsallis 统计的核心内容是构造非广延熵<sup>[54]</sup>:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (57)$$

式中  $W$  为系统可能的微观状态数,  $p_i$  为系统处于第  $i$  个微观态的概率,  $q$  为非广延参数. 显然, 当  $q = 1$  时,  $S_q = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ , 因此 Tsallis 统计是传统统计的一种拓展.

Tsallis 统计中一个有趣的问题是复合系统的能量表达形式. 在 Tsallis 统计中, 熵的非广延性将导致其他热力学量的非广延性, 因此必须考虑熵的非广延性所引起的一系列协变. 对于由多个子系统构成的复杂系统, 以前的研究一直存在熵的非广延性与其他参数之间不协调的问题, 其中最重要也最基本的问题是能量的合理表述. 最近, 本课题组从逻辑上严谨地阐明了一个关键问题<sup>[56]</sup>: 即热力学第零定律已隐含在 Tsallis 理论中, 指出在 Tsallis 理论中无需引进新物理温度的概念. 在此基础上, 通过严密的逻辑推理和严格的数学推导, 给出了能量和其他参数在 Tsallis 理论中的合理表述, 从而解决了阻碍 Tsallis 理论发展的一个难题. 此外, 非广延参数  $q$  在实际系统中所代表的意义也成为一个颇受关注的问题. 本课题组在该方面也进行了探索, 并取得了一些有意义的结果<sup>[57]</sup>.

非完整统计<sup>[55]</sup>是 Wang 于 2001 年在 Tsallis 非广延熵的基础上对归一化条件进行了一些修改后提出来的. 对于一个复杂系统, 由于其内部存在长程相互作用或记忆效应, 描述该系统的哈密顿量往往过于复杂, 导致系统的所有基态以及本征值无法全部求得, 而只能通过系列简化和近似求得概率分布. 因为这一分布不能代表全部存在的基态, 此概率函数的归一化将不同于原来的玻尔兹曼-吉布斯归一化  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ , 而应表示为

$$\sum_{i=1}^W p_i^q = 1, \quad (58)$$

称为非完整归一化.

非完整统计理论在能量表达形式上与系统的非广延性存在自然的统一, 目前已经引起国际上一些研究者的关注. 本课题组在这方面已有较深入的研究<sup>[58-59]</sup>, 可望在此基础上分析热力学基本定律的普适性, 建立普遍的热力学关系.

### 5.2 广义 BEC

基于 Tsallis 统计, Bykkilic 等导出了广义玻色-爱因斯坦分布<sup>[60]</sup>

$$f_{k,q} = \frac{1}{[1 + (q-1)\beta(\epsilon_k - \mu)]^{1/(q-1)}}. \quad (59)$$

从式 (59) 出发, 我们研究了满足广义玻色-爱因斯坦分布的理想玻色气体的 BEC 特性, 获得了一些重要的结论.

计算结果表明, 对于约束在体积为  $V_D$  的  $D$  维空间中能谱为  $\epsilon_k = ap^s$ , 粒子分布满足式 (59) 的理想玻色气体, BEC 临界温度和定容热容可分别表为<sup>[61]</sup>

$$T_{C,q} = \frac{ah^s}{\pi^{s/2} k_B} \left[ \frac{N}{g V_D} \frac{\Gamma(D/2+1)}{\Gamma(D/s+1)} \frac{1}{\zeta_q(D/s)} \right]^{s/D}, \quad (60)$$

$$C_V = \begin{cases} Nk_B \left[ \frac{D}{s} \left( 1 + \frac{D}{s} \right) \frac{g^{D/s+1,q}(z)}{g^{D/s,q}(z)} - \frac{D^2}{s^2} \frac{g^{D/s,q}(z)}{g^{D/s-1,q}(z)} \right] & (T > T_{C,q}), \\ Nk_B \frac{D}{s} \left( 1 + \frac{D}{s} \right) \left( \frac{T}{T_{C,q}} \right)^{D/s} \frac{\zeta_q(D/s+1)}{\zeta_q(D/s)} & (T \leq T_{C,q}). \end{cases} \quad (61)$$

式中

$$g^{l,q}(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-(q-1)l}}{(q-1)^j} \frac{\Gamma[j/(q-1)-l]}{\Gamma[j/(q-1)]} & (q > 1), \\ \sum_{j=l}^{\infty} \frac{x^{j+(1-q)l}}{(1-q)^j} \frac{\Gamma[j/(q-1)+l]}{\Gamma[l/(q-1)+l+1]} & (q < 1) \end{cases}. \quad (62)$$

称为广义玻色积分,  $\zeta_q(l) = g^{l,q}(1)$  称为广义 Riemann-zeta 函数, 逸度  $z$  满足

$$N = \frac{V_D}{\lambda^D} g^{D/s,q}(z). \quad (63)$$

图 4 表示由式 (60) 绘出的广义 BEC 临界温度  $T_{C,q}$  与非广延参数  $q$  的关系曲线, 其中

$$T_C = T_{C,1} = \frac{ah^s}{\pi^{s/2} k_B} \left[ \frac{N}{V} \frac{\Gamma(D/2+1)}{\Gamma(D/s+1)} \frac{1}{\zeta(D/s)} \right]^{s/D} \quad (64)$$

为  $q = 1$  (广延系统) 时的 BEC 临界温度. 图 4 表明,  $T_{C,q}$  随着参数  $q$  的增大而减小, 即当  $q > 1$  时,  $T_{C,q} < T_C$ ; 当  $q < 1$  时,  $T_{C,q} > T_C$ . 此外从图示还可以看出, 当  $q > 1$  时,  $T_{C,q}$  随着  $D/s$  的增大而减小; 而当  $q < 1$  时,  $T_{C,q}$  随着  $D/s$  的增大而增大.

图 5 表示由式 (61) 绘出的定容热容  $C_V/Nk_B$  与约化温度  $T/T_{C,q}$  的关系曲线, 其中  $D/s = 1.5$ . 从图中可得以下结论: (1) 在任意温度下, 定容热容随参数  $q$  的增大而增大; (2) 当  $D/s = 1.5$  时, 定容热容在 BEC 临界点是连续的, 但其对温度的一阶导数不连续, 这一点与广延玻色系统的结果一致; (3) 当  $q < 1$  时, 在  $T > T_{C,q}$  的区域, 定容热容随温度的增大而单调减小; 当  $q$

> 1时,在  $T > T_{c,q}$  区域存在某一温度  $T_m$ , 使得  $T_{c,q} < T < T_m$  时,定容热容随温度的增大而减小,而  $T > T_m$  时,定容热容随温度的增大而单调增大,这一现象已在实验中观测到<sup>[62]</sup>.

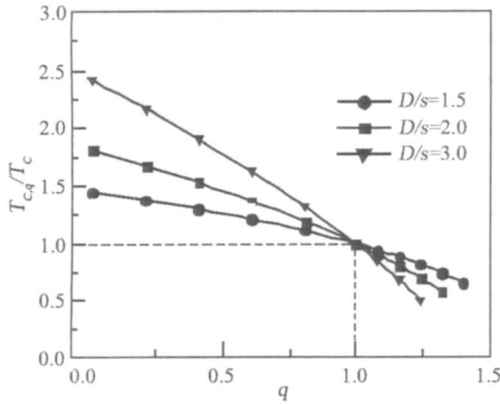


图4 不同  $D/s$  条件下约化临界温度  $T_{c,q}/T_c$  与非广延参数  $q$  的关系曲线

Fig. 4 The curves of  $T_{c,q}/T_c$  versus  $q$  for some different values of  $D/s$

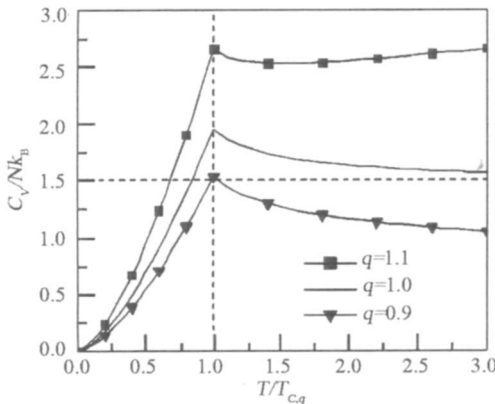


图5  $D/s = 3/2$  时定容热容  $C_V/Nk_B$  与约化温度  $T_{c,q}/T_c$  的关系曲线

Fig. 5 Heat capacity at constant volume  $C_V/Nk_B$  as a function of  $T_{c,q}/T_c$  for  $D/s = 3/2$

## 6 前景展望

有关量子气体的低温特性及其相关理论的研究已成为现代物理学的前沿问题之一,并且已经渗透到物理学的各个领域,包括凝聚态、基本粒子、高能物理和天体物理等.尽管近年来关于 BEC 及费米简并气体的研究取得了重大的进展,该领域仍然有许多重要问题有待于进一步探索,例如, BEC 形成的动力学过程、BEC 凝聚态的超流特性、光与 BEC 发生相互作用时的非线性特征、费米子形成 Cooper 对的过程及分子

BEC 的性质等.基于本课题组近年来在超冷量子气体统计性质方面的研究工作和取得的成果,我们将在今后的研究中进一步深入探讨上述重要问题.

## 参考文献:

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor [J]. Science, 1995, 269: 198-201.

[2] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, et al. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75: 1687-1690.

[3] Davis K B, Mewes M-O, Andrews M R, et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75: 3969-3973.

[4] DeMarco B, Jin D S. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas [J]. Science, 1999, 285: 1703-1706.

[5] Truscott A G, Strecker K E, McAlexander W I, et al. Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms [J]. Science, 2001, 291: 2570-2572.

[6] Schreck F, Khaykovich L, Corwin K L, et al. Quasipure Bose-Einstein condensate immersed in a Fermi sea [J]. Phys Rev Lett, 2001, 87: 080403.

[7] Granade S R, Gehm M E, O'Hara K M, et al. All-optical production of a degenerate Fermi gas [J]. Phys Rev Lett, 2002, 88: 120405.

[8] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, et al. Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms [J]. Nature, 2003, 424: 47-50.

[9] Greiner M, Regal C A, Jin D S. Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas [J]. Nature 2003, 426: 537-540.

[10] Regal C A, Greiner M, Jin D S. Observation of resonance condensation of fermionic atom pairs [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 040403.

[11] Zwierlein M W, Stan C A, Schunck C H, et al. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91: 250401.

[12] Zwierlein M W, Stan C A, Schunck C H, et al. Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 120403.

[13] Jochim S, Bartenstein M, Altmeyer A, et al. Bose-Einstein condensation of molecules [J]. Science, 2003, 302: 2101-2103.

[14] Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, et al. Crossover from a molecular Bose-Einstein condensate to a degenerate Fermi gas [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 120401.

[15] Huang K. Statistical mechanics [M]. New York: Wiley, 1963.



- [ 16 ] Pathria R K. Statistical mechanics [ M ]. New York: Pergamon press, 1972.
- [ 17 ] Abramowitz M, Stegun C A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables [ M ]. New York: Dover press, 1972.
- [ 18 ] Su G, Ou C, Wang A, et al. Finite-size effects in a  $D$ -dimensional ideal Fermi gas [ J ]. Chin Phys B, 2009, 18: 5189-5195.
- [ 19 ] Su G, Chen L, Chen J. A new approach to treat the problems of trapped ideal gases [ J ]. J Phys A: Math Theor, 2009, 42: 125003.
- [ 20 ] Yan Z. Bose-Einstein condensation of a trapped gas in  $n$ -dimensions [ J ]. Phys Rev A, 1999, 59: 4657-4659.
- [ 21 ] Aguilera-Navarro V C, de Llano M, Sols M A. Bose-Einstein condensation for general dispersion relations [ J ]. Eur J Phys, 1999, 20: 177-182.
- [ 22 ] May R M. Quantum statistics of ideal gases in two dimensions [ J ]. Phys Rev Lett, 1964, 135: A1515-A1518.
- [ 23 ] Howard Lee M. Equivalence of ideal gases in two dimensions and Landau's relations [ J ]. Phys Rev E, 1997, 55: 1518-1520.
- [ 24 ] Stamper-Kurn D M, Miesner H J, Chikkatur A P, et al. Reversible formation of a Bose-Einstein condensate [ J ]. Phys Rev Lett, 1998, 81: 2194-2197.
- [ 25 ] Huang K, Yang C N. Quantum-mechanical many-body problem with hard-sphere interaction [ J ]. Phys Rev Lett, 1956, 105: 767-775.
- [ 26 ] Huang K, Yang C N, Luttinger J M. Imperfect Bose gas with hard-sphere interaction [ J ]. Phys Rev Lett, 1956, 105: 776-784.
- [ 27 ] Lee T D, Huang K, Yang C N. Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties [ J ]. Phys Rev Lett, 1957, 106: 1135-1145.
- [ 28 ] Lee T D, Yang C N. Low-temperature behavior of a dilute Bose system of hard spheres. I. equilibrium properties [ J ]. Phys Rev Lett, 1958, 112: 1419-1429.
- [ 29 ] Chou T T, Yang C N, Yu L H. Bose-Einstein condensation of atoms in a trap [ J ]. Phys Rev A, 1996, 53: 4257-4259.
- [ 30 ] Chou T T, Yang C N, Yu L H. Momentum distribution for bosons with positive scattering length in a trap [ J ]. Phys Rev A, 1997, 55: 1179-1181.
- [ 31 ] Su G, Chen J, Chen L. Formulation of the thermodynamic properties of an interacting Bose gas trapped in a power-law potential [ J ]. Physica A, 2006, 368: 459-470.
- [ 32 ] Ensher J R, Jin D S, Matthews M R, et al. Bose-Einstein condensation in a dilute gas: measurement of energy and ground-state occupation [ J ]. Phys Rev Lett, 1996, 77: 4984-4987.
- [ 33 ] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases [ J ]. Rev Mod Phys, 1999, 71: 463-512.
- [ 34 ] Naraschewski M, Stamper-Kurn D M. Analytical description of a trapped semi-ideal Bose gas at finite temperature [ J ]. Phys Rev A, 1998, 58: 2423-2426.
- [ 35 ] Su G, Chen L, Chen J. An analytical description on the low temperature behavior of a weakly interacting Bose gas [ J ]. J Phys A: Math Gen, 2004, 37: 3041-3052.
- [ 36 ] Baym G, Pethick C J. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas [ J ]. Phys Rev Lett, 1996, 76: 6-9.
- [ 37 ] Minguzzi A, Conti S, Tosi M P. The internal energy and condensate fraction of a trapped interacting Bose gas [ J ]. J Phys: Condens Matter, 1997, 9: L33-L38.
- [ 38 ] Sklyanin E K. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation [ J ]. Funct Anal Appl, 1982, 16: 263-270.
- [ 39 ] Kulish P P, Reshetikhin N Y. Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations [ J ]. J Sov Math, 1983, 23: 2435-2441.
- [ 40 ] Macfarlane A J. On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and quantum group  $SU_q(2)$  [ J ]. J Phys A: Math Gen, 1989, 22: 4581-4588.
- [ 41 ] Biedenharn L C. The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators [ J ]. J Phys A: Math Gen, 1989, 22: L873-L878.
- [ 42 ] Zhang J Z. A  $q$ -deformed quantum mechanics [ J ]. Phys Lett B, 1998, 440: 66-68.
- [ 43 ] Caracciolo R, Monteiro M R. Anyonic realization of  $SU_q(N)$  quantum algebra [ J ]. Phys Lett B, 1993, 308: 58-63.
- [ 44 ] Dimakis A, Müller-Hoissen F. Quantum mechanics on a lattice and  $q$ -deformations [ J ]. Phys Lett B, 1992, 295: 242-248.
- [ 45 ] Bonatsos D, Daskaloyannis C, Kolokotronis P. Generalized deformed oscillators for vibrational spectra of diatomic molecules [ J ]. Phys Rev A, 1992, 46: 75-80.
- [ 46 ] Bonatsos D, Daskaloyannis C. Generalized deformed oscillator for vortices in superfluid films [ J ]. Mod Phys Lett B, 1996, 21: 1011-1019.
- [ 47 ] Tuszynski J A, Rubin J L, Meyer J, et al. Statistical mechanics of a  $q$ -deformed boson gas [ J ]. Phys Lett A, 1993, 175: 173-177.
- [ 48 ] Shu Y, Chen J, Chen L. Bose-Einstein condensation of a  $q$ -deformed ideal Bose gas [ J ]. Phys Lett A, 2002, 292: 309-314.

- [49] Yan Z. Pseudovolume and equation of state for an ideal trapped Bose gas in  $n$  dimensions [J]. *Phys Rev A*, 2000, 61: 063607.
- [50] Hamity V H, Barraco D E. Generalized nonextensive thermodynamics applied to the cosmic background radiation in a Robertson-Walker universe [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 76: 4664-4666.
- [51] Huang X P, Anderegg F, Hollmann E M, et al. Steady-state confinement of non-neutral plasmas by rotating electric fields [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 78: 875-878.
- [52] Lyra M L, Tsallis C. Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 53-56.
- [53] Prato D, Tsallis C. Nonextensive foundation of Levy distributions [J]. *Phys Rev E*, 1999, 60: 2398-2401.
- [54] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics [J]. *J Stat Phys*, 1988, 52: 479-487.
- [55] Wang Q A. Incomplete statistics: nonextensive generalizations of statistical mechanics [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, 12: 1431-1437.
- [56] Ou C, Chen J. Two long-standing problems in Tsallis' statistics [J]. *Physica A*, 2006, 370: 525-529.
- [57] Huang Z, Su G, Kaabouchi A E, et al. Self-similar motion for modeling anomalous diffusion and nonextensive statistical distributions [J]. *J Stat Mech*, 2010, L05001.
- [58] Ou C, Chen J, Wang Q A. Temperature definition and fundamental thermodynamic relations in incomplete statistics [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 28: 518-521.
- [59] Huang Z, Lin B, Chen J. A new expression of the probability distribution in incomplete statistics and fundamental thermodynamic relations [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 40: 1277-1281.
- [60] B y kkiç F, Demirhan D, G leç A. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases [J]. *Phys Lett A*, 1995, 197: 209-220.
- [61] Chen J, Zhang Z, Su G, et al.  $q$ -generalized Bose-Einstein condensation based on Tsallis entropy [J]. *Phys Lett A*, 2002, 300: 65-70.
- [62] Wang Q A, Pezeril M, M haut A L. Nonextensive boson gas and specific heat of  $^4\text{He}$  superfluid [J]. *Physica A*, 2000, 278: 337-346.

## Statistical Properties of Ultracold Quantum Gases

SU Guo-zhen\*, CHEN Jian-can

(School of Physics and Mechanical & Electrical Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** A series of major experimental breakthroughs have been obtained in the researches of ultracold quantum gases in the past years, which include the realization of Bose-Einstein condensation (BEC), the achievements of Fermi degeneracy and the observations of molecular BEC. This renewed the theoretical studies on the characteristics of BEC and degenerate Fermi gases, which have become a topic of great interest in the recent years. Based on the research works of our groups in the last years, the statistical properties of ultracold quantum gases are briefly described. The main contents include: the finite-size effects of quantum gases, roles of external potential, influence of interatomic interaction, low temperature behaviors of  $q$ -deformed quantum gas and the nonextensive statistics. The results obtained may be helpful to the further understanding of the low temperature behaviors of quantum gases as well as the underlying nature of various macroscopic quantum effects.

**Key words:** ultracold quantum gas; finite-size effect; external potential; interatomic interaction; nonextensive statistics